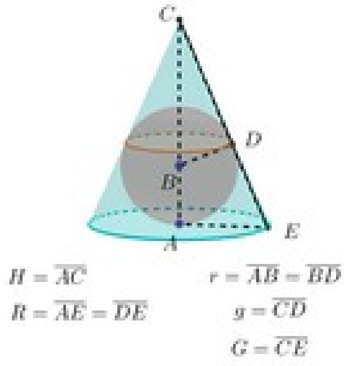
Llamamos *r* al radio conocido de la esfera, *R* al radio del cono, *H* a su altura, *G* a su generatriz y *g* a la generatriz del cono cuya base está limitada por la circunferencia de tangencia a la esfera.



Obsérvese que, puesto que los segmentos *AE* y *DE* son tangentes a la esfera y tienen el mismo origen, sus longitudes son iguales e iguales al radio del cono.

Por un lado tenemos que $G = \sqrt{H^2+R^2}$, y por otro que $G = g+R$. Si consideramos ahora el triángulo rectángulo BDC, tenemos que

$$g^2+r^2 = (H-r)^2 = H^2-2rH+r^2 \Rightarrow g = \sqrt{H^2-2rH}$$

Igualamos ahora las dos expresiones para *G*, sustituyendo en ellas el valor de *g* que acabamos de obtener:

$$\sqrt{H^2+R^2} = \sqrt{H^2-2rH}+R \Rightarrow H^2+R^2 = H^2-2rH+2R\sqrt{H^2-2rH}+R^2 \Rightarrow R = \frac{rH}{\sqrt{H^2-2rH}}$$

La función que queremos optimizar es

$$V(H) = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{r^2H^2}{H^2-2rH}\cdot H = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{r^2H^3}{H^2-2rH}$$

$$V' = \frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{3H^2(H^2-2rH)-H^3(2H-2r)}{(H^2-2rH)^2} = \frac{\pi r^2}{3}\cdot\frac{H^4-4rH^3}{(H^2-2rH)^2}$$

$$V' = 0 \Rightarrow H^3(H-4r) = 0 \Rightarrow H = \begin{cases} 0 \\ 4r \end{cases}$$

La solución 0 no es compatible con el problema, por lo que la altura del cono debe ser cuatro veces el radio de la esfera. El radio del cono será, entonces

$$R = \frac{4r^2}{\sqrt{16r^2-8r^2}} = \frac{4r^2}{2\sqrt{2}r} = r\sqrt{2}.$$