BLOQUE D

PROBLEMA D2. Dada la función *$f(x) = x^3 - 12\,x + 7$,* se pide

a) Hallar sus máximos y mínimos relativos.
b) Hallar sus máximos y mínimos absolutos en el intervalo [– 3 , 3].
c) Hallar sus máximos y mínimos absolutos en el intervalo [– 4 , 4].
d) Hallar sus máximos y mínimos absolutos en el intervalo [– 5 , 5].

Solución:

Previo: como f(x) es una función polinómica, su dominio es todos los números reales.

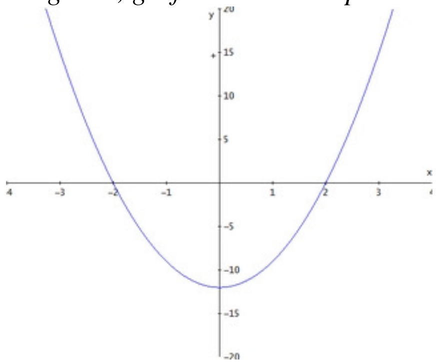
a) Máximos y mínimos relativos.

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$,

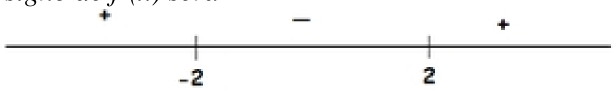
$f'(x) = 3\,x^2 - 12$

$3\,x^2 - 12 = 0; \quad 3\,x^2 = 12; \quad x^2 = 4; \quad x = \pm 2$

En la recta real marcamos los valores de x, – 2 y 2, y estudiamos el signo de $f'(x)$ teniendo en cuenta que $f'(x)$ es un polinomio de 2º grado, gráficamente una parábola, con coeficiente de x^2 positivo, es decir:



Por lo que el signo de $f'(x)$ será



Luego en x = – 2 hay un máximo relativo y en x = 2 un mínimo relativo.

Calculemos los valores de f(x) correspondientes,

$f(-2) = (-2)^3 - 12\,(-2) + 7 = -8 + 24 + 7 = 23$

$f(2) = 2^3 - 12 \,.\, 2 + 7 = 8 - 24 + 7 = -9$

Y finalmente, f(x) tiene un máximo relativo en el punto (– 2 , 23) y un mínimo relativo en el punto (2 , – 9).

Para contestar a los siguientes apartados debemos considerar que por ser f(x) una función polinómica, es una función continua y derivable en R. Entonces, al restringir el estudio de sus extremos absolutos a un intervalo cerrado, sabemos que estos se alcanzan en los extremos del intervalo o en los extremos relativos obtenidos en el apartado anterior.

Calcularemos los valores de la función en los extremos del intervalo correspondiente y lo compararemos con los extremos relativos. Así determinaremos los extremos absolutos.

b) Extremos absolutos en [– 3 , 3].

$x = -3; \quad f(-3) = (-3)^3 - 12\,(-3) + 7 = -27 + 36 + 7 = 16$

$x = 3; \quad f(3) = 3^3 - 12 \,.\, 3 + 7 = 27 - 36 + 7 = -2$

luego en el intervalo [– 3 , 3] el máximo absoluto es (– 2 , 23) y el mínimo absoluto es (2 , – 9).

c) Extremos absolutos en [– 4 , 4].

$x = -4; \quad f(-4) = (-4)^3 - 12\,(-4) + 7 = -64 + 48 + 7 = -9$

$x = 4; \quad f(4) = 4^3 - 12 \,.\, 4 + 7 = 64 - 48 + 7 = 23$

luego en el intervalo [– 4 , 4] los máximos absolutos son (– 2 , 23) y (4 , 23) y los mínimos absolutos son (2 , – 9) y (– 4, – 9).

d) Extremos absolutos en [– 5 , 5].

$x = -5; \quad f(-5) = (-5)^3 - 12\,(-5) + 7 = -125 + 60 + 7 = -58$

$x = 5; \quad f(5) = 5^3 - 12 \,.\, 5 + 7 = 125 - 60 + 7 = 72$

luego en el intervalo [– 5 , 5] el máximo absoluto es (5 , 72) y el mínimo absoluto es (– 5 , – 58).