LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A la transformada de Laplace se le dio este nombre en honor del famoso matemático y astrónomo francés Pierre Simón Laplace (1.749-1.827), quien desarrolló los fundamentos de la teoría del potencial y realizó importantes contribuciones a la mecánica celeste y a la teoría de la probabilidad.

El método de la transformada de Laplace es especialmente útil para tratar problemas de circuitos eléctricos y muchos otros en los que se pidan soluciones particulares ya que las condiciones iniciales dadas se incorporan en las ecuaciones de transformación, resultando directamente la solución buscada, evitándose de esta forma el tener que encontrar la solución general y después los valores de las constantes que satisfagan las condiciones iniciales.

Definición: Si a una función dada f(x), definida para todo valor positivo de x, se hace corresponder una nueva función.

$$F(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$$

a la correspondencia se le llama la transformación de Laplace y a F(s) la transformada de Laplace de f(x) siempre y cuando la integral converja para valores finitos de s mayores que un s_0 fijo y la denotamos por $F(s)=T[f(x)]=F(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$

Ejemplo

$f(x)=1$

$$L(1)=\int_0^{\infty} e^{-st}(1)dt=\left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_0^{\infty}=\frac{-e^{-\infty}}{s}+\frac{e^0}{s}=\frac{1}{s}$$

Ejemplo

$f(t)=e^{at}$

$$L\{e^{at}\}=\int_0^{\infty} e^{-st}(e^{at})dt=\int_0^{\infty} e^{-st+at}dt=\int_0^{\infty} e^{-t(s-a)}dt=\left[\frac{-e^{-t(s-a)}}{s-a}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{s-a}$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Se desarrollan algunas propiedades que se pueden usar para hallar transformadas de funciones más complicadas sin tener que emplear la definición.

Propiedad 1. $T[kf(x)] = kT[f(x)]$ Donde es una constante cualquiera.

Propiedad 2. (Linealidad). La transformación de Laplace es una operación lineal, es decir:

$$T[af(x) \pm bg(x)] = aT[f(x)] \pm bT[g(x)]$$

donde, a y b son constantes.

Propiedad 3. (Traslación). Si $T[f(x)] = F(s)$ para $s \succ s_0$, entonces,

$$T\left[e^{ax} f(x)\right] = F(s-a) \text{ Para } s \succ s_0, + a$$

Ejemplo

Dada la transformada de Laplace $T[senx] = \dfrac{1}{s^2+1}$ obtener $T\left[e^{3x} senx\right]$

Desarrollo

Por la propiedad de cambio de traslación $T\left[e^{ax} f(x)\right] = F(s-a)$

$$T\left[e^{3x} senx\right] = \frac{1}{(s-3)^2+1}$$

Propiedad 4. (Cambio de escala). Si $T[f(x)] = F(s)$ para $s \succ s_0$, entonces,

$$T[f(ax)] = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a}) \text{ Para } s \succ s_0, + a$$

Ejemplo

Dada la transformada de Laplace $T[senx] = \dfrac{1}{s^2 + 1}$ obtener $T[senax]$

Desarrollo

Por la propiedad de cambio de escala $T[f(ax)] = \dfrac{1}{a} F(\dfrac{s}{a})$

$$T[senax] = \frac{1}{3} \frac{1}{(s/3)^2 + 1} = \frac{3}{s^2 + 9}$$

Teoremas de la transformada de Laplace

Teoremas de la transformada de Laplace

Teorema 1. (Existencia). Si $f(x)$ es seccionalmente continua en $[a,b]$ para todo b>0 finito y si $f(x)$ es de orden exponencial a cuando $x \to +\infty$, entonces la transformada de Laplace de $f(x)$ existe para

s> a

Teorema 2. (Transformadas de derivadas). Si $f(x)$ satisface la condición $|f(x)| \prec Me^{ax}, \forall x \geq 0$ donde *M* y *a* son algunas constantes, entonces:

$$T[f'(x)] = sT[f(x)] - f(0)$$

Teorema 3. (Transformada de integral). Si $f(x)$ satisface la condición de que $|f(x)| < Me^{ax}, \forall x \geq 0,$, donde *M* y *a* son algunas constantes, entonces

$$T\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{1}{s}T[f]$$

Teorema 4. (Multiplicación por x^n)

Si $T[F(x)] = f(s)$ entonces $T\left[x^n F(x)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$

Teorema 5. (División por x)

Si $T[F(x)] = f(s)$ entonces $T\left[\frac{F(x)}{x}\right] = \int_s^{\infty} f(u)du$

Siempre que el límite $\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x}$

Ejemplo

Hallar la transformada de Laplace de $f(x) = xe^{3x}$

Desarrollo

Tenemos que

$$T[e^{3x}] = \frac{1}{s-3}$$

Por el teorema de la multiplicación por x

$$T[xe^{3x}] = (-1)^n \frac{d}{ds}(\frac{1}{s-3})$$

$$T[xe^{3x}] = \frac{1}{(s-3)^2}$$

Ejemplo

Hallar la transformada de Laplace de $f(x) = \frac{senx}{x}$

Desarrollo

Tenemos que

$$T[senx] = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

Por el teorema de la división por x

$$T\left[\frac{senx}{x}\right] = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1} du$$

$$T\left[\frac{senx}{x}\right] = tan^{-1}(u)|_s^\infty$$

$$T\left[\frac{senx}{x}\right] = tan^{-1}(1/s)$$

Transformación de ecuaciones mediante transformada de Laplace

Transformación de ecuaciones mediante transformada de Laplace

El proceso permite transformar expresiones que tengan formas polinomicas, exponenciales, trigonométricas y combinaciones de ellas.

Expresiones polinomicas

Ejemplo

Aplicar transformada de Laplace a la expresión

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$T\{f(x)\} = T\{x^3 + 3x^2 + 3x + 1\}$$

$$T\{f(x)\} = T\{x^3\} + 3T\{x^2\} + 3T\{x\} + T\{1\}$$

$$T\{f(x)\} = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}$$

Ejemplo

Aplicar transformada de Laplace a la expresión

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 4$$

$$T\{f(x)\} = T\{4x^2 - 5x + 4\}$$

$$T\{f(x)\} = 4T\{x^2\} - 5T\{x\} + 4T\{1\}$$

$$T\{f(x)\} = \frac{8}{s^3} - \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s}$$

Expresiones exponenciales

Ejemplo

Aplicar transformada de Laplace a la expresión

$$f(x) = \{1 + 2e^{2x} - 5e^{4x}\}$$

$$T\{f(x)\} = T\{1 + 2e^{2x} - 5e^{4x}\}$$

$$T\{f(x)\} = T\{1\} + 2T\{e^{2x}\} - 5T\{e^{4x}\}$$

$$T\{f(x)\} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s-2} - \frac{5}{s-4}$$

Ejemplo

Aplicar transformada de Laplace a la expresión

$$f(x) = \{e^{-x} + 5e^{-3x} - 5e^{-4x}\}$$

$$T\{f(x)\} = T\{e^{-x} + 5e^{-3x} - 5e^{-4x}\}$$

$$T\{f(x)\} = T\{e^{-x}\} + 5T\{e^{-3x}\} - 5T\{e^{-4x}\}$$

$$T\{f(x)\} = \frac{1}{s+1} + 5\,\frac{2}{s+3} - \frac{5}{s+4}$$

Expresiones trigonométricas

Ejemplo

Aplicar transformada de Laplace a la expresión

$$f(x) = sen2x + 4\cos 5x$$

$$T\{f(x)\} = T\{sen2x + 4\cos 5x\}$$

$$T\{f(x)\} = T\{sen2x\} + 4T\{\cos 5x\}$$

$$T\{f(x)\} = \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{4s}{s^2 + 25}$$

Expresiones combinadas

Ejemplo

Aplicar transformada de Laplace a la expresión

$$f(x) = e^{-2x} sen2x + e^{3x} \cos 5x$$

$$T\{f(x)\} = T\{e^{-2x} sen2x + e^{3x} \cos 5x\}$$

$$T\{f(x)\} = T\{e^{-2x} sen2x\} + T\{e^{3x} \cos 5x\}$$

$$T\{f(x)\} = \frac{2}{(s+2)^2+4} + \frac{s-3}{(s-3)^2+25}$$