Quadratische Ungleichungen lösen

Anleitung:

1. Lege den Funktionsterm $f(x)$ fest.
2. Bestimme die Nullstellen von f.
3. Skizziere die Nullstellen auf der x-Achse.
4. Skizziere die Parabel von f mittels der Nullstellen und dem Vorzeichen des Streckfaktors a.
5. Beschreibe die Lösungen der Ungleichung durch den (die) farbig markierten Bereich(e) auf der x-Achse.

Beispiel 1: Löse die Ungleichung $x^2 - 4 > 0$ mithilfe einer Skizze.

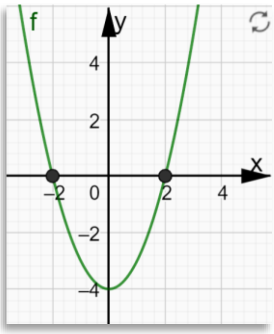
Lösung: Wir legen den Funktionsterm $f(x) = x^2 - 4$ fest und bestimmen die Nullstellen x_1 und x_2:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

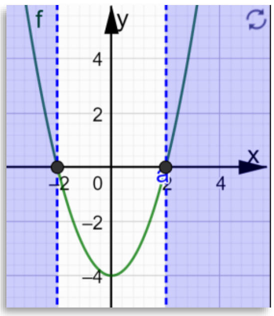
Wir skizzieren im x-y-Koordinatensystem:

- die Nullstellen x_1, x_2 und
- die nach oben geöffnete Parabel (Streckfaktor $a = 1 > 0$, denn vor dem x^2 denken wir die Zahl 1).

Skizzen:



Es gilt $f(x) > 0$. Wir markieren auf der x-Achse die entsprechenden Bereiche.
Die Abgrenzungen sind gestrichelte Linien, denn die Nullstellen erfüllen nicht die Ungleichung $f(x) > 0$.



Ergebnis: Lösungen der Ungleichung $x^2 - 4 > 0$ sind alle reellen Zahlen x für die gilt: $x < -2$ und $x > 2$.

Beispiel 2: Löse die Ungleichung $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$ mithilfe einer Skizze.

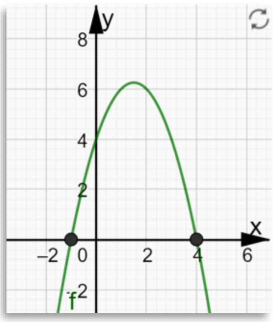
Lösung: Wir legen den Funktionsterm $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ fest und bestimmen die Nullstellen x_1 und x_2:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 4.$$

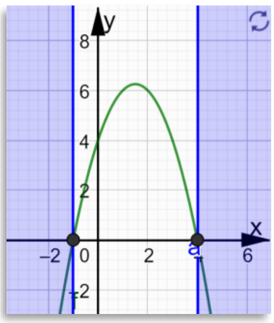
Wir skizzieren im x-y-Koordinatensystem:

- die Nullstellen x_1, x_2 und
- die nach unten geöffnete Parabel (Streckfaktor $a = -1 < 0$).

Skizzen:



Es gilt $f(x) \leq 0$. Wir markieren auf der x-Achse die entsprechenden Bereiche.
Die Abgrenzungen sind durchgezogene Linien, denn die Nullstellen erfüllen die Ungleichung $f(x) \leq 0$.



Ergebnis: Lösungen der Ungleichung $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$ sind alle reellen Zahlen x für die gilt: $x \leq -1$ und $x \geq 4$.

Beispiel 3: Löse die Ungleichung $2x^2 + 5x + 9 < 0$ mithilfe einer Skizze.

Lösung: Wir legen den Funktionsterm $f(x) = 2x^2 + 5x + 9$ fest und bestimmen die Nullstellen x_1 und x_2:

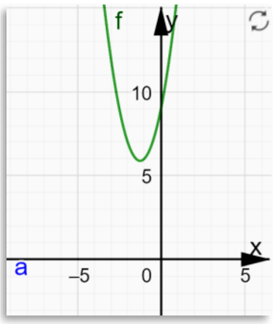
$$f(x) = 0$$

$$\text{Es gibt keine reellen Nullstellen.}$$

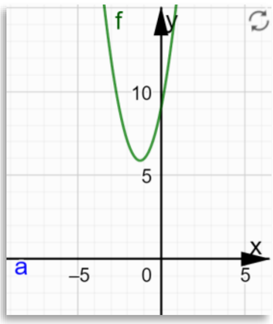
Wir skizzieren im x-y-Koordinatensystem:

- die nach oben geöffnete Parabel (Streckfaktor $a = 2 > 0$).

Skizzen:



Es gilt $f(x) < 0$. Wir können für auf der x-Achse keine entsprechenden Bereiche markieren, denn die Parabel liegt oberhalb der x-Achse.



Ergebnis: Für die Ungleichung $2x^2 + 5x + 9 < 0$ gibt es keine reellen Lösungen.

Beispiel 4: Löse die Ungleichung $0.4(x-8)^2 > 0$ mithilfe einer Skizze.

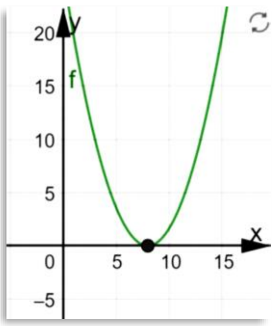
Lösung: Wir legen den Funktionsterm $f(x) = 0.4(x-8)^2$ fest und bestimmen die Nullstellen x_1 und x_2:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=8 \quad (Doppellösung).$$

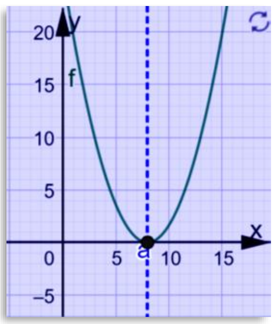
Wir skizzieren im x-y-Koordinatensystem:

- die Nullstelle $x_{1,2}$ und
- die nach oben geöffnete Parabel (Streckfaktor a=0.4>0).

Skizzen:



Es gilt $f(x) > 0$. Wir markieren auf der x-Achse den entsprechenden Bereich. Durch die Zahl 8 zeichnen wir eine gestrichelte Linie, denn die Zahl 8 erfüllt nicht die Ungleichung $f(x) > 0$. Im markierten Bereich liegen also alle reellen Zahlen, mit Ausnahme der Zahl 8.



Ergebnis: Lösungen der Ungleichung $0.4(x-8)^2 > 0$ sind alle reellen Zahlen, außer der Zahl 8.

Kurz: $x \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$.

Beispiel 5: Löse die Ungleichung $5(x+2.5)^2 < 61.25$ mithilfe einer Skizze.

Lösung:

Vorbereitung: $5(x+2.5)^2 < 61.25 \quad | -61.25$

$5(x+2.5)^2 - 61.25 < 0$

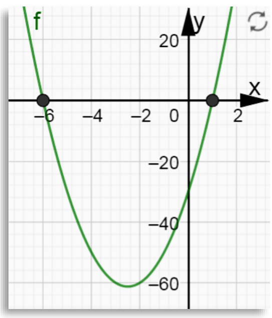
Wir legen den Funktionsterm $f(x) = 5(x+2.5)^2 - 61.25$ fest und bestimmen die Nullstellen x_1 und x_2:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6, x_2 = 1.$$

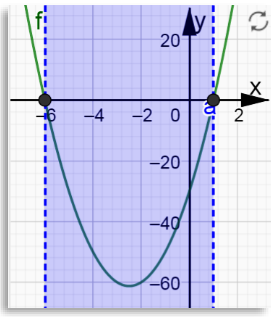
Wir skizzieren im x-y-Koordinatensystem:

- die Nullstellen x_1, x_2 und
- die nach oben geöffnete Parabel (Streckfaktor $a = 5 > 0$).

Skizzen:



Es gilt $f(x) < 0$. Wir markieren auf der x-Achse den entsprechenden Bereich. Die Abgrenzungen sind gestrichelte Linien, denn die Nullstellen erfüllen nicht die Ungleichung $f(x) < 0$.



Ergebnis: Lösungen der Ungleichung $5(x+2.5)^2 < 61.25$ sind alle reellen Zahlen x für die gilt: $-6 < x < 1$.

Nebenrechnung zu Beispiel 5 – Berechnung der Nullstellen von f:

$$f(x) = 5(x + 2.5)^2 - 61.25$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 5(x + 2.5)^2 - 61.25 &= 0 && | + 61.25 \\ 5(x + 2.5)^2 &= 61.25 && | : 5 \\ (x + 2.5)^2 &= 12.25 && |\text{Radizieren} \\ x + 2.5 &= \pm 3.5 \end{aligned}$$

$$x_1 = -6$$
$$x_2 = 1$$

Ergebnis: Nullstellen von f sind die Zahlen: -6 und 1.