Hoja de trabajo semana 2

- Luis Esteban Vasquez Muñoz (A00362474)

Problemas de valor inicial.

1. Suponga que la función $f(t) = -5t + 2t + 6$ nos da información sobre la posición en cada instante t de una partícula P en movimiento rectilíneo, con respecto a cierto sistema de referencia.

a. Ilustre gráficamente, sobre una recta, el movimiento de la partícula. Debe hacer algunas suposiciones (sugerencia: puede ser útil una tabla de datos).

b. Construya en un archivo de GeoGebra las siguientes gráficas del movimiento:

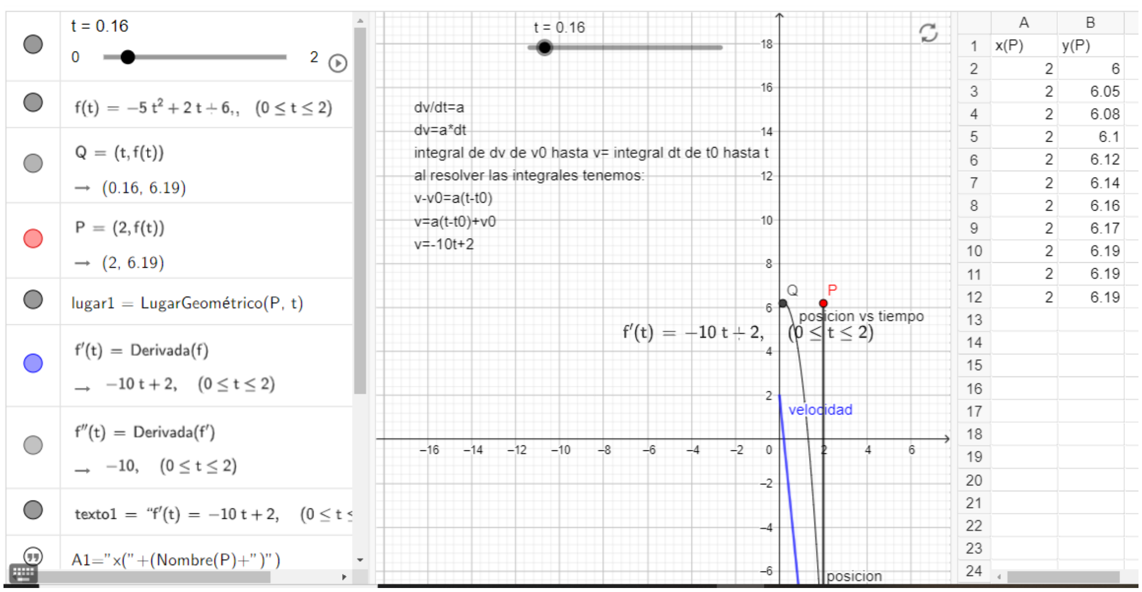
i. Posición vs tiempo.

ii. Velocidad vs tiempo

iii. Aceleración vs tiempo

iv. Movimiento rectilíneo de P (como se ilustra en el enlace a MRUA)

https://www.geogebra.org/m/nfvypkg4



2. Con la situación planteada en el punto anterior podemos asociar, “pensando en reversa”, lo que en ED se conoce como un Problema de Valores Iniciales (PVI). En este caso, la información del problema sería la aceleración de la partícula (PVI de segundo orden), y un conjunto mínimo de datos sobre algún instante del movimiento, suficientes y necesarios (es decir, ni más ni menos) para determinar la función que nos de la posición de la partícula en cada instante.

a. Escriba un PVI asociado a la información del punto 1. ¿Se puede tener más de un PVI asociado con la misma información? Argumente su respuesta.

R/

- $f''(t) = -10$; $f'(1/5) = 0$; $f(1.31) = 0$

  No se puede tener mas de un PVI asociado con la misma información, ya que el primer dato del que se parte es único debido a que si se cambia este por otro valor estamos obteniendo una integral con valores diferentes a los del problema original; lo que si puede variar es la forma en que nos den los valores siguientes, porque si se iguala a un valor diferente la función y se le da un valor diferente a t, se puede hallar el mismo constante de integración (Cn).

b. Utilice técnicas de cálculo de una variable para resolver su PVI y compruebe que su solución es correcta.

R/ Comprobación

- Se integra $f''(t) = -10$ … se obtiene $f'(t) = -10t + C1$
  Aquí usamos $f'(1/5) = 0$ … $= -10(1/5) + C1 = 0$ …. De donde se obtiene que $C1 = 2$

- Se integra $f'(t) = -10t + 2$ … se obtiene $f(t) = -5t^2 + 2t + C2$
  Aquí usamos $f(1.31) = 0$ … $= -5(1.31)^2 + 2(1.31) + C2 = 0$ … De donde se obtiene que $C2 = 6$

- Finalmente se obtiene $f(t) = -5t^2 + 2t + 6$

c. Utilice la idea de "pensar en reversa" para construir otro ejemplo de PVI de segundo orden, con información diferente a la del punto 1, y un ejemplo de PVI de tercer orden.

- PVI segundo orden

  $f''(t) = 15$; $f'(0) = 3$; $f(-4) = 0$

- PVI tercer orden
  $f'''(t) = 3$; $f''(0) = 4$; $f'(2) = 3$; $f(3) = 0$

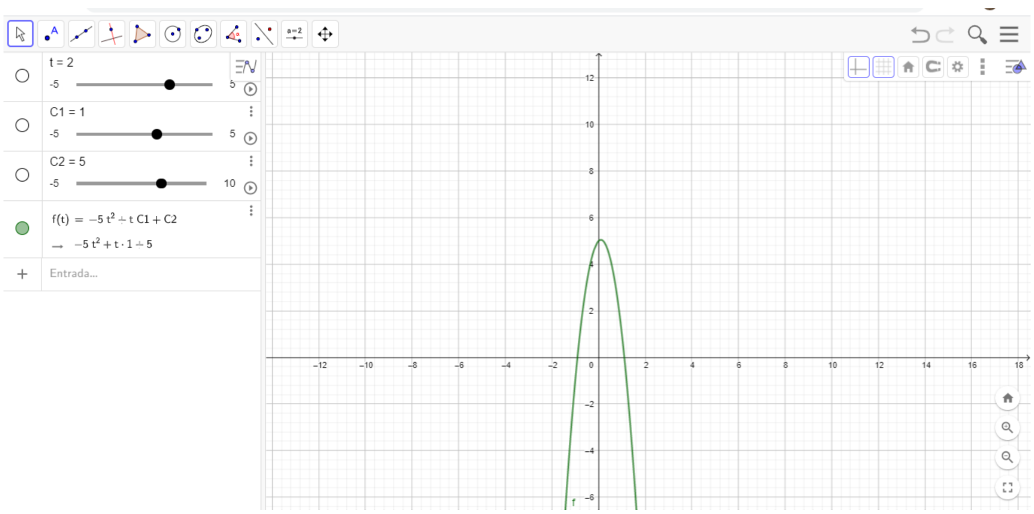
d. ¿Cuál sería un método general para construir un PVI de orden n? Argumente su respuesta.

Familias n-paramétricas de curvas.

1. La función f(t) = −5t 2 + c1t + c2

representa una familia 2-paramétrica de curvas. Las constantes c1 y c2 son parámetros que pueden tomar valores arbitrarios.

a. Construya en GeoGebra curvas de la familia f(t) utilizando deslizadores.
https://www.geogebra.org/m/mbdkccvs

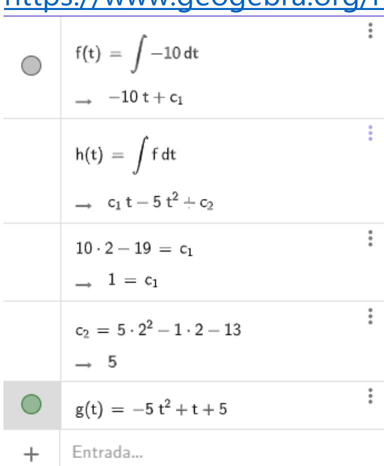


b. Para cada escogencia arbitraria del par (c1, c2) se obtiene una curva particular de la familia.

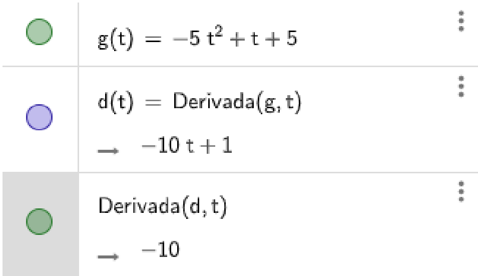
i. Escoja una curva particular y un instante arbitrario t0 para escribir un PVI asociado a la curva
R/ f''(t)= -10   f'(2)= -19 f(2)= -13 t_0=2

ii. Utilice procedimientos de cálculo y de álgebra para obtener el par (c1, c2) a partir de la información disponible en su PVI del ítem i anterior (apóyese con el CAS de GeoGebra). Verifique su respuesta.

https://www.geogebra.org/m/bhbnzssq



Ahora se deriva

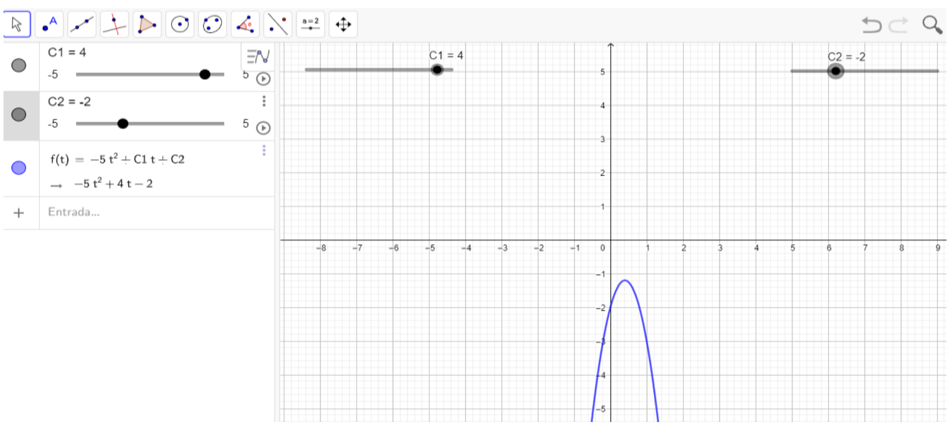


Hemos llegado a nuestro punto de partida

c. Repita los dos procesos del ítem b para para otra curva particular de la misma familia.

Se escoge valores de c1 y c2 diferentes.

https://www.geogebra.org/m/uq3rvmhc



La ecuación que describe la curva es $-5t^2+4t-2$

$F''(t)=-10$

$t_0= 2$

$F'(2)=-16$

$F(2)=-14$

Integramos para hallar los valores de c1 y c2 https://www.geogebra.org/m/wdgwgyye

$$f(t) = \int -10\,dt$$

$$\rightarrow \quad -10\,t + c_1$$

$$g(t) = \int f\,dt$$

$$\rightarrow \quad c_1\,t - 5\,t^2 + c_2$$

$$10 \cdot 2 - 16 = c_1$$

$$\rightarrow \quad 4 = c_1$$

$$5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 14 = c_2$$

$$\rightarrow \quad -2 = c_2$$

$$h(t) = -5\,t^2 + 4\,t - 2$$

Entrada...

Ahora derivamos

$$h(t) = -5\,t^2 + 4\,t - 2$$

$$i(t) = \text{Derivada}(h, t)$$

$$\rightarrow \quad -10\,t + 4$$

$$\text{Derivada}(i, t)$$

$$\rightarrow \quad -10$$

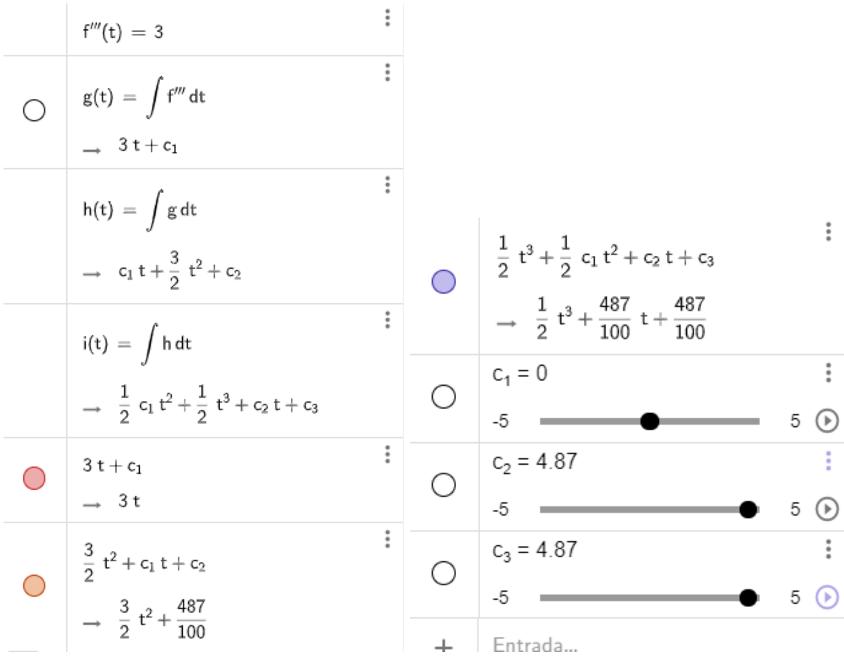
Y comprobamos que llegamos a nuestro primer punto de partida

2. Lea con cuidado la siguiente afirmación: “al resolver un PVI de orden n usando solamente la ecuación diferencial, se obtiene una familia n-paramétrica de curvas solución”.

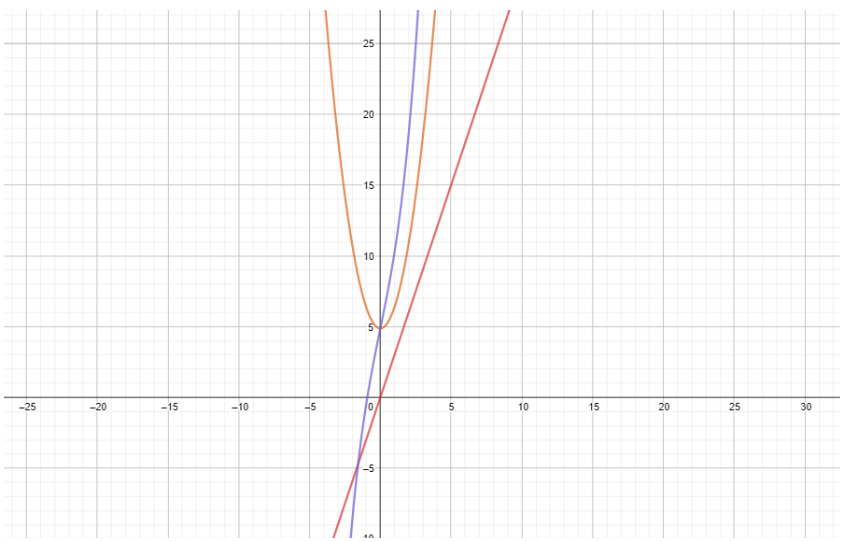
a. Construya ejemplos de la afirmación para los casos n = 1, n = 2 y n = 3.

https://www.geogebra.org/m/xpueunmy

- **F’’’=** 3
- **F’’(0)=** 4
- **F’(2)=** 3
- **F(3)=** 0



Formando así n curvas paramétricas



b. Formule una explicación de por qué la afirmación es verdadera.

La afirmación es verdadera porque al resolver el PVI encontramos que se nos forman n curvas paramétricas, en el cual el parámetro es t y existen tres escalares también a los cuales yo puedo darle valores arbitrarios para poder formar muchas curvas, en este caso la curvas que formamos ya la tenemos puesto que existen valores para c_1, c_2 y c_3 que pueden ser encontrados siguiendo el PVI. El valor 3 no sería una curva paramétrica porque no depende de ningún parámetro.

Ecuaciones diferenciales y sus soluciones.

1. Hasta ahora usted ha trabajado con algunas ecuaciones diferenciales de orden n.

a) Explique en sus términos, de acuerdo a lo que ha entendido hasta el momento, qué es una ecuación diferencial de orden n. Ilustre su definición con ejemplos.

R/ Una ecuación diferencial de orden n es una expresión matemática en la que se relaciona una función con sus n derivadas.

Por ejemplo, al formar un PVI de orden 2 estamos relacionando una función con sus dos derivadas.

$f''(t)= 1$ ED $f'(2)=4$ $f(2)=0$ PVI

b) Explique en sus términos, de acuerdo a lo que ha entendido hasta el momento, qué es una solución de una ecuación diferencial de orden n. Ilustre su definición con ejemplos.

R/ La solución a una ecuación diferencial de orden n es la función que obtenemos al integrar n veces.

Como ejemplo esta la solución al PVI del punto anterior, en el que tenemos que integrar 2 veces, ya que es un PVI de orden 2.

Así:

La función $f(t)= t^2/2 + 2t +6$ es la solución a la ecuación $f''(t)=1$; $f'(2)=4$; $f(2)=0$

2. Repasando sus conocimientos matemáticos previos se encontrará con las nociones de continuidad de funciones y derivabilidad de funciones.

a) Explique lo que usted considere fundamental de cada una de esas nociones y las relaciones que existen entre ambas. Ilustre sus explicaciones con ejemplos.

R/ Derivabilidad: Si una función es derivable en un punto x=a entonces es continua para x=a

Continuidad: Indica la unión de partes que forman un todo y que se desarrollan en el tiempo

Por ejemplo, para una función que no sea continua y por ende no sea derivable, como la siguiente función:

$f(x)= 2x^2+1$ si $x<1$; $f(x)= x+2$ si $x>1$

Al derivar estas funciones y reemplazar las x por 1 (x=1) nos damos cuenta que obtenemos diferentes resultados para cada trozo de la función, por lo tanto, la función no es derivable en x=1, pero si es derivable en el resto de los reales.

b) A partir de sus reflexiones sobre continuidad y derivabilidad complemente su respuesta 1b indicando condiciones para las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

R/ La continuidad es necesaria, así como la derivabilidad ya que una ecuación diferencial cuenta con derivadas e integrales que hacen posible la solución. Así que si no se puede derivar o integrar no se podría llegar a una solución.

c) Un estudiante de EDO afirmó, respondiendo una pregunta de examen, que la función y =1/x, x ≠ 0, es una solución particular de la ecuación diferencial de primer orden xdy/dx = y. Participe en el foro respondiendo: ¿Está de acuerdo con la respuesta del estudiante? Justifique su posición al respecto.

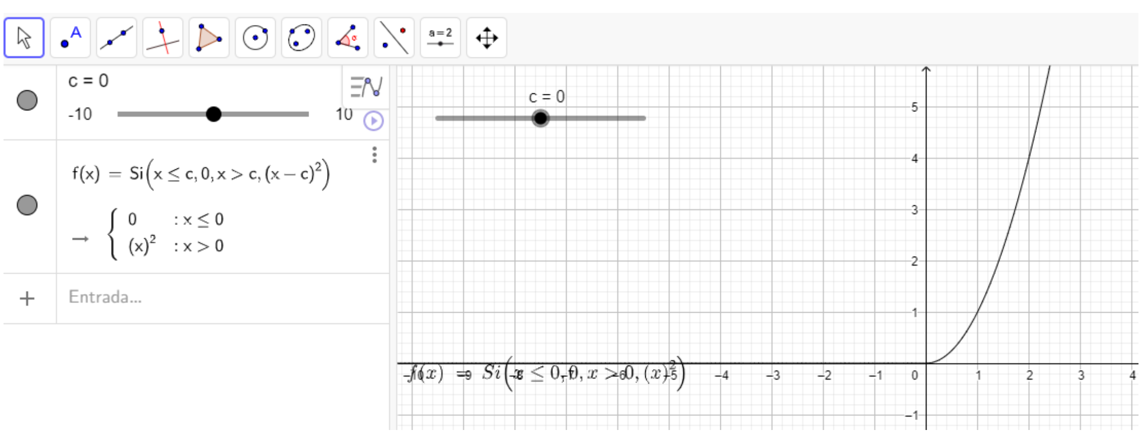
R/ no estoy de acuerdo con la afirmación del estudiante debido a que y =1/x, x ≠ 0, no es la solución a la ecuación diferencial xdy/dx = y. en cambio, y =1/x, x ≠ 0 si es la solución a la ecuación diferencial Ydy/dx= $-1/x^2$, x≠0 de primer orden, puesto que al derivar y una vez no obtenemos xdy/dx = y sino Ydy/dx= $-1/x^2$, x≠0.

Resolución y formulación de problemas

1) Configure un deslizador c en el intervalo [-10,10] y construya en GeoGebra la familia de funciones a trozos:

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c \\ (x-c)^2, & x > c \end{cases}$$

https://www.geogebra.org/m/ydkfrmgt



a) Justifique la siguiente afirmación: para cualquier valor del parámetro c, la función y(x),x ∈ R, es solución de la ecuación diferencial y’ = 2√y.

R/ la función a trozos Y(x) es solución de la ecuación diferencial y’ = 2√y para todo x debido a que derivando la función y(x) obtenemos que

Y’= 2(x-c) y reemplazando y’=2√y ya que √y =x-c

Por lo cual podemos afirmar que el parámetro c no afecta el resultado porque, aunque “y” dependa del valor que tome c como función, no lo afecta en nada el ponerlo en solución puesto que, y es una variable que está en términos de “x” y de “c” variables, pero sin cambiar por así decirlo la solución que puede dar “y(x)”

b) Utilice la construcción de GeoGebra para explicar por qué el siguiente PVI tiene infinitas soluciones: y’ = 2√y, y(0) = 0.

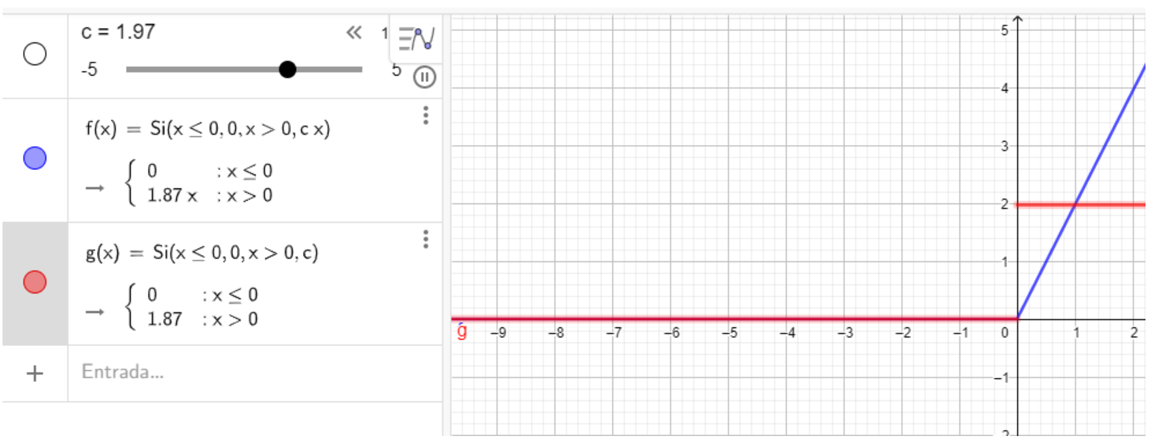
$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Y(x)=0 ∀x E R (solución constante)

$$\begin{cases} 0, x < 0 \\ x^2, x \geq 0 \end{cases}$$

Ambas satisfacen la condición inicial, así que tiene cuando menos 2 soluciones, y podríamos hallar más soluciones que cumplan las condiciones iniciales y se podría decir que tiene infinitas soluciones

https://www.geogebra.org/m/ca4wdwae



- Como c es una constante, vemos que, al variar su valor, obtenemos diferentes familias de curvas en la derivada.
- La derivada da como resultado rectas en el primer cuadrante y paralelas al eje x
- Con un PVI de orden uno podríamos hallar múltiples soluciones que cumplan con las condiciones que allí se presentan.