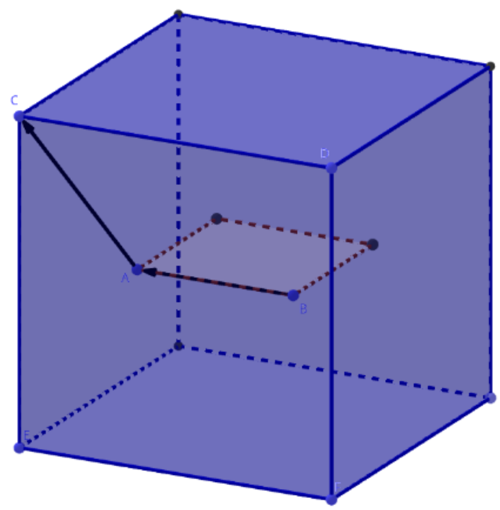
Demostració angles 120º
Cub dins del Sabó
15 d'abril de 2023

Si suposem que la bombolla del mig del cub és un quadrat i suposem que els plans que van del quadrat als vèrtexs del cub són trapezis, podem imposar que l'angle entre aquests plans sigui de 120º. Per fer-ho, considerarem que tenim un quadrat de costat a i un cub de costat b. I buscarem la relació que han de tenir els dos paràmetres per aconseguir que l'angle entre aquesta plans sigui dels 120º.

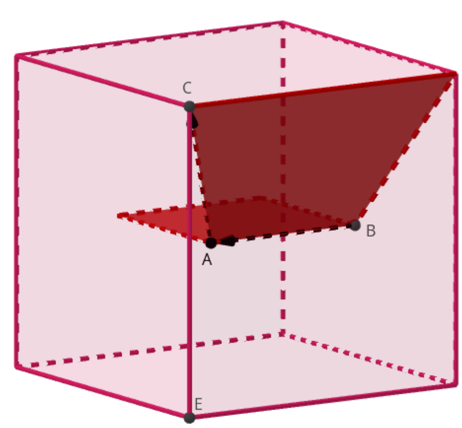


Considerem un quadrat sobre el pla XY centrat a l'origen de costat a i considerem un cub de costat b també centrat a l'origen amb el quadrat dins del cub. Per tant, considerem $0 < a < b$.

Agafem com a vèrtexs:

$$A = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right) \qquad B = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right) \qquad C = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right) \qquad E = \left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

Ara calculem els dos vectors directors que defineixen el pla que uneix un costat del quadrat(el costat que va del I quadrant al II) amb una aresta del cub, l'aresta que és paral·lela a aquest costat i té $y, z > 0$ constants.



$$\vec{u_1} = \frac{\vec{BA}}{||\vec{BA}||} = (1,0,0) \qquad \vec{u_2} = \frac{b}{2}\vec{AC} = \left(1-\frac{a}{b}, 1-\frac{a}{b}, 1\right)$$

Per calcular l'equació del pla, prenem el punt A, i els vectors directors $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$:

$$\begin{vmatrix} x-\frac{a}{2} & 1 & 1-\frac{a}{b} \\ y-\frac{a}{2} & 0 & 1-\frac{a}{b} \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\left(y-\frac{a}{2}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)+z\left(1-\frac{a}{b}\right)=0 \Longleftrightarrow -\frac{a}{b}\left(y-\frac{a}{2}\right)+z\left(1-\frac{a}{b}\right)=0 \Longleftrightarrow$$

$$-\left(y-\frac{a}{2}\right)+z\left(1-\frac{a}{b}\right)=0 \Longleftrightarrow -y+\frac{a}{2}+\left(1-\frac{a}{b}\right)z=0 \Longleftrightarrow$$

$$y+\left(\frac{a}{b}-1\right)z-\frac{a}{2}=0$$

Aquest pla, l'anomenem π.

Ara imposem que l'angle entre el pla del quadrat que està sobre el pla XY i el pla π sigui de $120^{\underline{o}}$. Per fer-ho, imposarem que l'angle entre els dos vectors normals al pla sigui de $120^{\underline{o}}$. El vector normal al quadrat és el $(0,0,1)$ i el vector normal al pla π és $\omega = \left(0,\ 1,\ \frac{a}{b}-1\right)$. Agafat d'aquesta manera, com que $0<a<b$, vol dir que $\frac{a}{b}-1<0$, per tant, és un vector orientat cap $z<0$ i podem imposar que l'angle sigui de $120^{\underline{o}}$:

$$\cos(120) = -\frac{1}{2} = \frac{(0,0,1)\cdot(0,1,\frac{a}{b}-1)}{||(0,0,1)||\cdot||(0,1,\frac{a}{b}-1)||} \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} = \frac{\frac{a}{b}-1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}-1\right)^2}} \Longleftrightarrow$$

$$\left(1-\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}-1\right)^2} \Longleftrightarrow 2\left(1-\frac{a}{b}\right) = \sqrt{1+\left(1-\frac{a}{b}\right)^2} \Longleftrightarrow$$

$$4\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 = 1+\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 \Longleftrightarrow 3\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 = 1 \Longleftrightarrow \left[1-\frac{a}{b}>0\right]$$

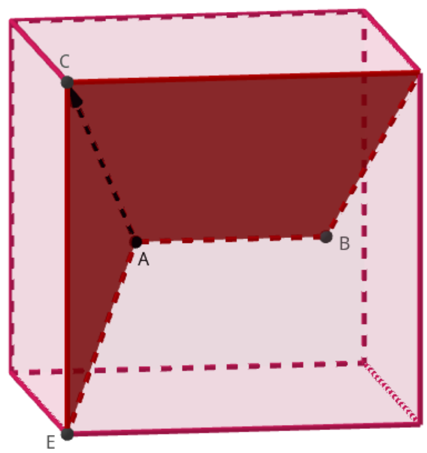
$$1-\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{1}{3}} \Longleftrightarrow 1-\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longleftrightarrow \frac{3-\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{b} \Longleftrightarrow$$

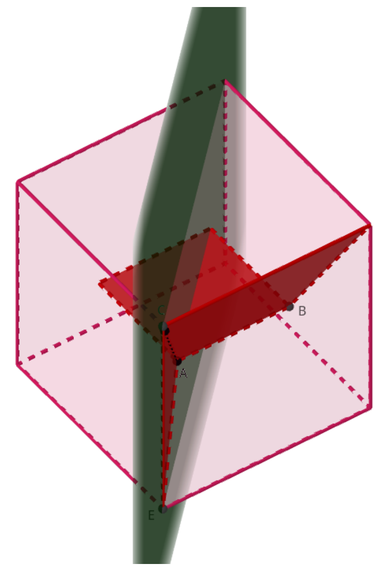
$$a = \frac{3-\sqrt{3}}{3}b$$

Per tant, si considerem un cub de costat b, podem saber quina mida hauria de tenir el quadrat per aconseguir que l'angle entre els plans que sorgeixen del quadrat sigui de $120^{\underline{o}}$.

Ara calcularem l'angle entre el pla π anterior i el pla generat pel triangle que uneix els vèrtexs A, C i E.

Per construcció el pla que uneix els vèrtexs A, C i E és el pla $\pi_2 : \{x=y\}$ perquè és el pla diagonal al cub que passa pel centre i passa pels punts C i E i, de retruc, pels dos vèrtexs oposats del cub i, a més, talla amb la diagonal del quadrat.





Per tant, ara imposarem que l'angle entre el pla π i el π_2 sigui 120º, com hem fet abans. Els vectors normals als plans són $(0, 1, \frac{a}{b} - 1)$ i $(1, -1, 0)$ respectivament. Apliquem la mateix fórmula pel càlcul de l'angle entre dos vestors:

$$\cos(120) = -\frac{1}{2} = \frac{(1,-1,0)\cdot(0,1,\frac{a}{b}-1)}{||(1,-1,0)||\cdot||(0,1,\frac{a}{b}-1)||} \iff -\frac{1}{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}-1\right)^2}} \iff$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{1+\left(\frac{a}{b}-1\right)^2} \iff 1+\left(1-\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \iff \left(1-\frac{a}{b}\right)^2 = 1 \iff$$

$$\left[1-\frac{a}{b} > 0\right] \iff 1-\frac{a}{b} = 1 \iff \frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$$

Per tant, aconseguim l'angle de 120º entre aquests dos plans, quan el quadrat col·lapsa i es converteix en un punt al centre del quadrat. Per tant, entrem en contradicció, no pot pas ser, ha de passar alguna cosa més, però almenys hem demostrat que no són plans, cal tenir en compte alguna cosa més.

Si fem els càlculs i provem els valors que ens surten, veurem que no es correspon amb la realitat, ja que el quadrat que surt, és més gran que el que observem amb el sabó.