Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 8 - continuidad en funciones definidas a trozos

1. Estudia la continuidad de la siguiente función en los puntos $x=1$ y $x=5$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & si \quad x<1 \\ 2x-4 & si \quad 1\le x\le 5 \\ \ln(x-5) & si \quad x>5 \end{cases}$$

Estudiemos la continuidad en $x=1$.

$$\exists f(1)=2\cdot 1-4=-2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\frac{0}{0} \quad\rightarrow\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x-3)=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+}(2x-4)=-2$$

$$f(1)=-2=L$$

La función es continua en $x=1$.

Estudiemos la continuidad en $x=5$.

$$\exists f(5)=2\cdot 5-4=6$$

$$\lim_{x\to 5^-}(2x-4)=6$$

$$\lim_{x\to 5^+}\ln(x-5)=-\infty$$

La función presenta una discontinuidad no evitable de salto infinito en $x=5$.

2. Determina a y b para que la función sea continua en $x=0$ y en $x=3$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad x<0 \\ a\,x+b & si \quad 0\le x\le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & si \quad x>3 \end{cases}$$

La función es continua en $x=0$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$$\exists f(0)=a\cdot 0+b=b$$

$$\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}(a\,x+b)=b$$

Límites laterales iguales → $b=1$ → Existe el límite y vale $L=1$

$$f(0)=1=L$$

La función es continua en $x=3$ si se cumplen los siguientes requisitos.

$$\exists f(3)=a\cdot 3+b=3\,a+1$$

$$\lim_{x\to 3^-}(a\,x+b)=3\,a+1$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6$$

Límites laterales iguales → $3\,a+1=6$ → $a=\dfrac{5}{3}$

$$f(3)=6=L$$

3. Calcula el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} & si \quad x\neq 1 \; y \; x\neq 2 \\ -\sqrt{2k+1} & si \quad x=1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$.

Aplicamos las tres condiciones de continuidad de una función en un punto.

$\exists f(1)=-\sqrt{2k+1}$

$\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{0}{0}$ → Indeterminación → $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1^-} \dfrac{(x+1)}{(x-2)}=-2$

$\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{0}{0}$ → Es el mismo límite de antes → $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=-2$

Igualamos los límites laterales → $L=-2=-2$

Y comprobamos que la imagen en el punto coincide con el límite:

$f(1)=L \quad -2=-\sqrt{2k+1} \quad \rightarrow \quad 4=2k+1 \quad \rightarrow \quad k=\dfrac{3}{2}$

4. ¿Para qué valores de a y b la siguiente función es continua en todos los puntos de su dominio de definición?

$$f(x)=\begin{cases} b x^2+a x & si \quad x<-1 \\ \dfrac{a}{x} & si \quad -1\leq x<1 \ , \ x\neq 0 \\ \dfrac{x^2+a x+1}{x+1} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Tenemos que estudiar la continuidad en los intervalos abiertos y en los puntos frontera.

Intervalos abiertos:

$x<-1$ → función polinómica → continua en todo $\mathbb{R}$ → continua en $(-\infty,-1)$

$-1<x<1$ → función continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ → función continua en $(-1,1)-\{0\}$

$x>1$ → función polinómica → continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$ → función continua en $(1,+\infty)$

Estudio en el punto frontera $x=-1$:

$$f(-1)=\frac{a}{-1}=-a$$

$$\lim_{x\to -1^-} b x^2+a x=b-a \ , \ \lim_{x\to -1^+} \frac{a}{x}=\frac{a}{-1}=-a \ \rightarrow \ b-a=-a \ \rightarrow \ b=0$$

$$f(-1)=L \ \rightarrow \ -a=b-a \ \rightarrow \ b=0$$

Estudio en el punto frontera $x=1$:

$\nexists f(1)$ → ¡OJO! la función no toma ningún valor para $x=1$ → función no definida para $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{a}{x}=\frac{a}{1}=a \ , \ \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+a x+1}{x+1}=\frac{2+a}{2} \ \rightarrow \ a=\frac{2+a}{2} \ \rightarrow \ 2a=2+a \ \rightarrow \ a=2$$

Los límites laterales existen, coinciden y son finitos siempre que $a=2$. Pero la función no está definida en $x=1$. Estamos ante una discontinuidad evitable.

Por lo tanto en $x=1$ la función no es continua.

5. Analiza la continuidad de la función en $x=0$ **.**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2^x-1}{x} & si \quad x<0 \\ \dfrac{\cos(x)}{x^2+1} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Debemos estudiar la continuidad solo en el punto frontera.

$$\exists f(x=0) \quad \rightarrow \quad f(x=0)=\frac{\cos(0)}{0^2+1}=1$$

$$\lim_{x\rightarrow 0^-} \frac{2^x-1}{x}=\frac{0}{0}\rightarrow L'\,Hôpital\rightarrow \lim_{x\rightarrow 0^-} \frac{2^x\cdot \ln(2)}{1}=evaluar=\ln(2)\simeq 0{,}69$$

$$\lim_{x\rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{x^2+1}=\frac{1}{1}=1$$

$$1\neq \ln(2)$$

Estamos ante una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito, por existir los límites laterales, ser finitos pero no coincidir.

6. Determinar k para que la función sea continua en $x=0$.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1-e^{x}}{2x+1-e^{2x}} & si \quad x<0 \\ (2x-k)^{2} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Estudio la continuidad en el punto frontera $x=0$.

$\exists \; f(x_0)=f(0)=(-k)^2=k^2$

$\lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{x+1-e^{x}}{2x+1-e^{2x}}\right)=\dfrac{0}{0}$ → indeterminación

Aplicamos L'Hôpital → $\lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1-e^{x}}{2-2e^{2x}}\right)=\dfrac{0}{0}$ → indeterminación

Aplicamos L'Hôpital → $\lim_{x\to 0^-} \left(\dfrac{-e^{x}}{-4e^{2x}}\right)=\dfrac{1}{4}$

$\lim_{x\to 0^+} (2x-k)^2=k^2$

Para que la función sea continua en $x=0$, los límites laterales deben ser iguales. Por lo tanto:

$k^2=\dfrac{1}{4} \quad\rightarrow\quad k=\dfrac{\pm 1}{2}$

7. Determinar a y b para que la función sea continua en toda la recta real.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si \quad x<0 \\ a\,x+b & si \quad 0\le x\le 2 \\ x^3-1 & si \quad x>2 \end{cases}$$

Lo primero es estudiar la continuidad en los intervalos abiertos.

$x<0 \rightarrow f(x)=x^2+3$ → es continua en $x<0$ por ser polinómica

$0<x<2 \rightarrow f(x)=a\,x+b$ → es continua en $0<x<2$ por ser polinómica

$x>2 \rightarrow f(x)=x^3-1$ → continua en $x>2$ por ser polinómica

Analizamos la continuidad en los puntos frontera.

Para $x=0$:

$f(0)=a\cdot 0+b=b$

$\begin{cases} \lim_{x\rightarrow 0-} x^2+3=3 \\ \lim_{x\rightarrow 0+} a\,x+b=b \end{cases}$ → Límites laterales iguales → $b=3$

$f(0)=L \rightarrow b=b$

Para $x=2$ con $b=3$:

$f(2)=2a+3=2a+3$

$\begin{cases} \lim_{x\rightarrow 2-} a\,x+3=2a+3 \\ \lim_{x\rightarrow 2+} x^3-1=8-1=7 \end{cases}$ → Límites laterales iguales → $2a+3=7 \rightarrow a=2$

$f(2)=L \rightarrow 2a+3=2a+3$

Por lo tanto, para $a=2$ y $b=3$ tendremos $f(x)$ continua en toda la recta real.

8. Obtener m **para que la función** $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x} & si \quad x\leq 0 \\ \dfrac{(x+1)sen(x)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$ **sea continua en** $x=0$ **.**

Las condiciones de continuidad en un punto son:

$$f(0)=m$$

$$\lim_{x\to 0^-}(m(x+1)e^{2x})=m$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)sen(x)}{x}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{sen(x)+(x+1)\cdot\cos(x)}{1}=evaluar=1$$

Los límites laterales coinciden si $m=1$ → $límite \quad L=m$

$$f(0)=m=L$$

La función es continua en $x=0$ si $m=1$.

9. Obtener a **y** b **para que la función** $f(x)=\left\{\begin{matrix} \dfrac{a x^2+b x+1-e^{2x}}{sen(x^2)} & si \quad x\neq 0 \\ 1 \quad si \quad x=0 \end{matrix}\right\}$ **sea continua en** $x=0$ **.**

$\exists f(0)=1$

$L^{-}=L^{+}=L$

$L^{-}=\lim\limits_{x\to 0^{-}} \dfrac{a x^2+b x+1-e^{2x}}{sen(x^2)}=\dfrac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital → $L^{-}=\lim\limits_{x\to 0^{-}} \dfrac{2 a x+b-e^{2x} 2}{\cos(x^2) 2 x}=\dfrac{b-2}{0}$

Si el numerador no se anula, el cociente iría a infinito y la función no sería continua en el punto frontera. Por lo tanto, imponemos la condición $b-2=0 \quad \rightarrow \quad b=2$

$L^{-}=\lim\limits_{x\to 0^{-}} \dfrac{2 a x+2-e^{2x} 2}{\cos(x^2) 2 x}=\dfrac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital →

$L^{-}=\lim\limits_{x\to 0^{-}} \dfrac{2 a-e^{2x} 4}{-sen(x^2) 2 x 2 x+\cos(x^2) 2}=\dfrac{2 a-4}{2}=a-2$

$L^{+}=L^{-}=a-2$ → Los límites coinciden porque se aplican a la misma función, definida si $x\neq 0$

$f(0)=L \quad \rightarrow \quad a-2=1 \quad \rightarrow \quad a=3$

10. Considera la función continua $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ **definida por** $f(x)=\begin{cases}(3x-6)e^x & si \quad x\leq 0\\ \dfrac{36(sen(x)-ax)}{x^3} & si \quad x>0\end{cases}$ **.**

Calcula el valor de a **.**

Aplicamos condiciones de continuidad en el punto frontera.

$$\exists f(0)=(3\cdot 0-6)\cdot e^0=-6$$

$$L^-=\lim_{x\rightarrow 0^-}(3x-6)e^x=(evaluar)=-6$$

$$L^+=\lim_{x\rightarrow 0^+}\frac{36(sen(x)-ax)}{x^3}=\frac{0}{0}$$ → indeterminación → L'Hôpital

$$L^+=\lim_{x\rightarrow 0^+}\frac{36(\cos(x)-a)}{3x^2}=\frac{36(1-a)}{0}$$

Para que el límite sea finito necesitamos anular el numerador → $36(1-a)=0 \rightarrow a=1$

$$L^+=\lim_{x\rightarrow 0^+}\frac{36(\cos(x)-1)}{3x^2}=\frac{36(1-1)}{0}=\frac{0}{0}$$ → indeterminación → L'Hôpital

$$L^+=\lim_{x\rightarrow 0^+}\frac{36(-sen(x)-0)}{6x}=\lim_{x\rightarrow 0^+}\frac{-36\,sen(x)}{6x}=\lim_{x\rightarrow 0^+}\frac{-6\,sen(x)}{x}=\frac{0}{0}$$ → indeterminación → L'Hôpital

$$L^+=\lim_{x\rightarrow 0^+}\frac{-6\cos(x)}{1}=-6$$

Se cumple $L^+=L^-=L=-6$

$$f(0)=L=-6$$