FUNCIONES POR PARTES CONEXIÓN CON LA TECNOLOGÍA

GRÁFICA DE FUNCIONES A TROZOS O DEFINIDAS POR PARTES CON GEOGEBRA

OBJETIVO: Graficar funciones definidas por partes mediante GeoGebra para comprender a través de la visualización geométrica el comportamiento de la función en cada uno de los subdominios.

INTRODUCCIÓN

Graficar una función que no sea a trozos en GeoGebra es sencillo, solo basta escribir en la entrada de GeoGebra la función. Sin embargo, para obtener el gráfico de las funciones a trozos se necesitan registrar otras instrucciones compuestas por comandos. Los comandos que se van a utilizar para graficar funciones a trozos nos pueden ayudar a ilustrar y resolver problemas de modelado con funciones porque en estos casos se necesita restringir el dominio. Por otro lado, se pueden aprovechar estas ideas para el estudio de la sobreyectividad de funciones y las funciones inversas a través de GeoGebra.

Existen algunos métodos para obtener el gráfico de funciones a trozos con GeoGebra. Sin embargo, en este trabajo se utilizan dos comandos distintos que dan origen a dos métodos. La versión a utilizar es GeoGebra Clásico 5, no obstante, las actividades resueltas y propuestas se pueden trabajar sobre las versiones en línea y en las aplicaciones para dispositivos móviles.

MÉTODO 1

Para aplicar este método se utiliza el comando ***Función(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)***. Este comando se activa escribiendo en la entrada de GeoGebra la palabra **Función** o sus iniciales. Al hacer esto, se activará una lista desplegable en la cual se selecciona el comando deseado (ver Figura 1).

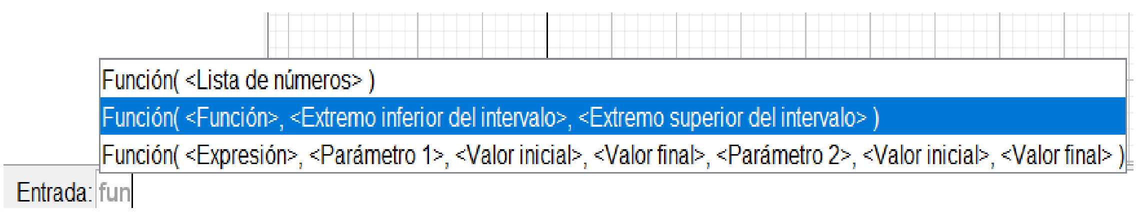

Figura 1: Escritura de comandos en la entrada de GeoGebra

En el primer argumento **<*Función*>** se escribe la función y en los últimos argumentos se escriben los extremos del intervalo en donde la función está definida. Por ejemplo, para graficar

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ x+3 & -2 \leq x < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

se registra en la entrada de GeoGebra las sintaxis

- $s(x)$ =Función($x^2, 0, 2$) y
- $r(x)$ =Función($x + 3$, -2, 0).

En la Figura 2 se muestra el gráfico de estas funciones, cada una está graficada de manera independiente tanto en la **Vista Algebraica** como en la **Vista Gráfica**. Esta independencia permite definir propiedades (color, estilo, entre otros) diferentes a cada función.

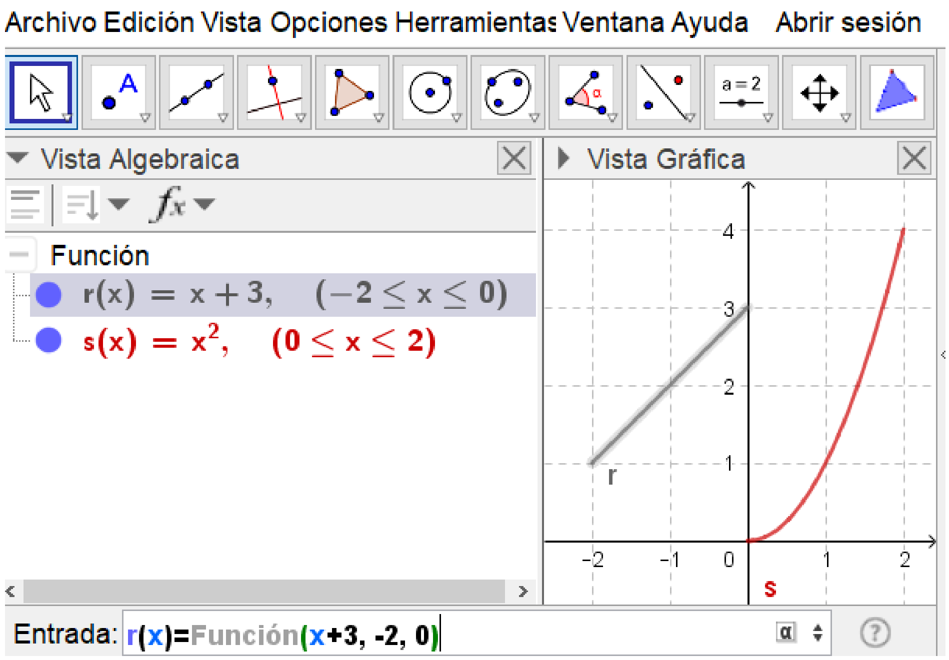

Figura 2: Gráfico de una función a trozos, método 1

MÉTODO 2

Este método permite visualizar en la **Vista Algebraica** la función escrita como la función (2), es decir, se representa como una sola función $g(x)$. El comando para conseguir este resultado es ***Si(<Condición>, <Entonces>)*** donde en el primer argumento **<*Condición*>** se introduce el dominio de la función escrito en notación de desigualdades y en el segundo argumento **<*Entonces*>** se escribe la función. En el caso de dos o más trozos de funciones se puede reescribir el comando en la forma ***Si(<Condición1>, <Entonces1>, <Condición2>, <Entonces2>, <Condición3>, <Entonces3>)***. Para aplicar este método se grafica la función

<Condición1> ***<Entonces1>***

$$g(x) = \begin{cases} \boxed{x + 1} & \boxed{-2 \leq x < 0} \\ x^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ \boxed{1} & \boxed{x > 2} \end{cases} \qquad (2)$$

<Condición3> ***<Entonces3>***

escribiendo en la entrada de GeoGebra la sintaxis:

- $g(x) = \text{Si}(-2 \leq x < 0, x + 1, 0 \leq x \leq 2, x^2, x > 2, 1)$.

De esta manera se obtiene la Figura 3.

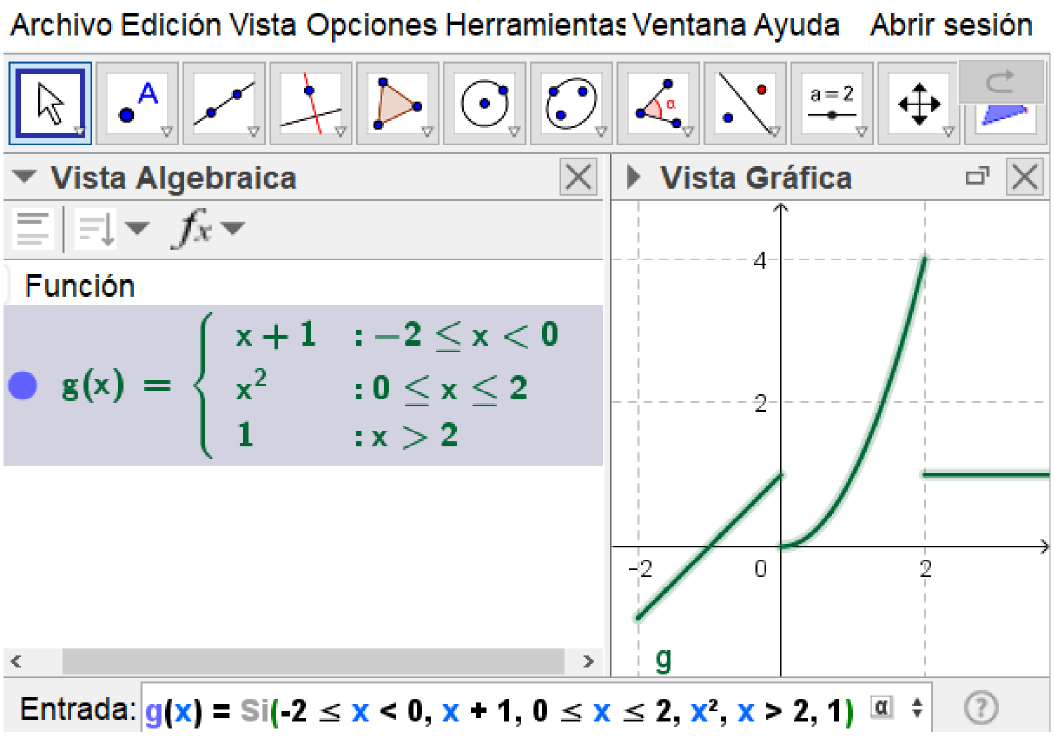

Figura 3: Gráfico de una función a trozos, método 2

Observe que al obtener la gráfica de $g(x)$ a través de una línea de comando no es posible cambiar propiedades específicas a cada trozo de la función (ver Figura 3). Sin embargo, registrando cada función por separado con el comando ***Si(<Condición>, <Entonces>)*** es posible establecer distintas propiedades a cada parte de la función.

En GeoGebra también se pueden graficar funciones del tipo

$$h(x) = \begin{cases} x - 1, & -2 \leq x < 0 \\ x^2, & en\ caso\ contrario \end{cases} \qquad (3)$$

El comando no está preestablecido, pero la idea es la siguiente ***Si(<Condición>, <Entonces>,<Entonces>).*** La estructura de este comando indica que se debe registrar en la entrada de GeoGebra lo siguiente:

- $h(x) = \text{Si}(-2 \leq x < 0, x - 1, x^2)$.

Para mejorar la visualización se pueden crear puntos en los extremos de cada función que visualmente indiquen que el punto relleno pertenece a la función, o que el punto sin relleno no pertenece a la función. En este ejemplo se ilustran los puntos extremos que pertenecen o no pertenecen a h es decir los puntos de la forma $(x, h(x))$. Estos puntos son $(-2,-3), (0,-1), (0,0)$ y $(-2,4)$. Al registrar estos puntos en la entrada se obtiene la Figura 4.

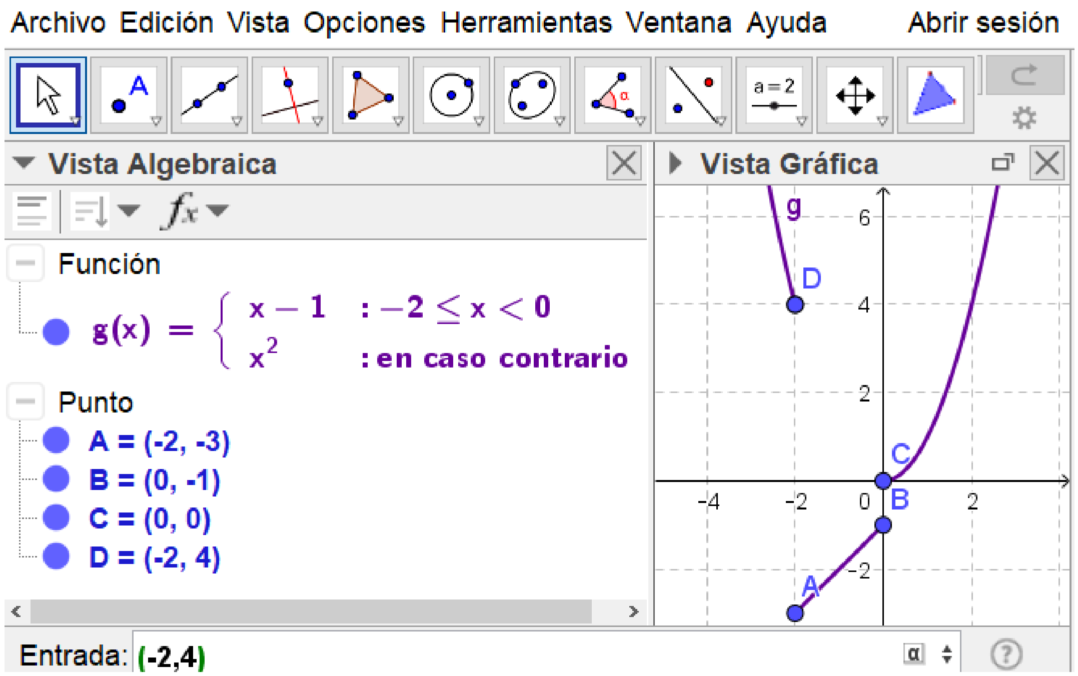

Figura 4: Grafo de $h(x)$ y puntos extremos

Para quitar las etiquetas o nombre de los puntos de la **Vista Gráfica** se da clic derecho sobre los puntos y se selecciona ***Etiqueta visible***. Luego para cambiar el estilo del punto se selecciona ***Propiedades de objeto***, con esta última selección se activa una ventana en la que se selecciona ***Estilo*** y luego se selecciona el ***Estilo de punto*** y se escoge punto con relleno o sin relleno de acuerdo a las necesidades. Además, aquí en esta ventana se puede cambiar el color, tamaño del punto, entre otros (ver Figura 5).

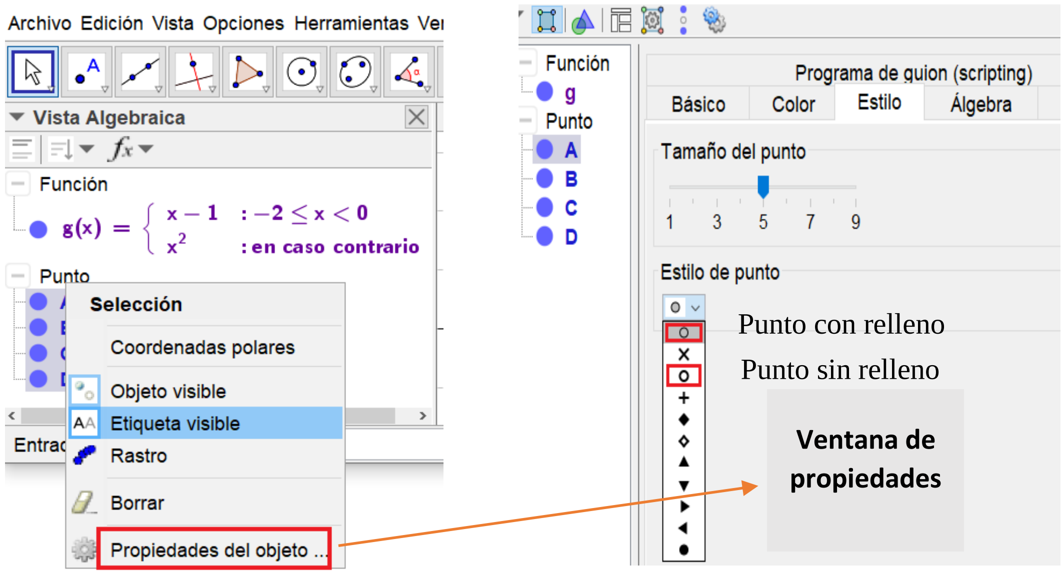

Figura 5: Cambio de Propiedades de un punto

Aplicando adecuadamente las propiedades sobre los puntos de acuerdo a la definición de $g(x)$ se obtiene la Figura 5.

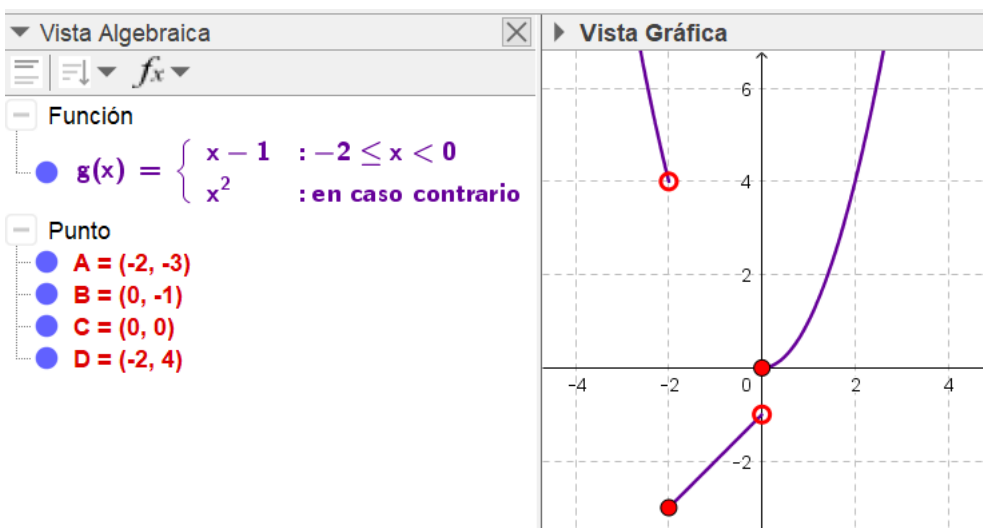

Figura 6: Grafo de $h(x)$

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Grafique con GeoGebra la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x < 2 \\ 4 - x^2, & x \geq 2. \end{cases}$$

2. Grafique con GeoGebra la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ 2x - 2, & 1 < x \leq 3 \\ 2, & x > 3 \end{cases}.$$

Determine su dominio y rango.

Actividad de aplicación

3. **Servicio de celular:** Sprint PCS ofrece un plan mensual de celular por $39.99. Incluye 350 minutos a cualquier hora más $0.25 por minuto por los minutos adicionales.
Se usa la siguiente función para calcular el costo mensual para un suscriptor

$$C(x) = \begin{cases} 39.99 & si\ 0 < x \leq 350 \\ 0.25x - 47.51 & si \quad x > 350 \end{cases}$$

donde x es el número de minutos usados a cualquier hora. Calcule el costo mensual de un teléfono celular si se usan los siguientes minutos. Grafique la función $C(x)$ (Sullivan, 2016):

a) 200 b) 365 c) 351