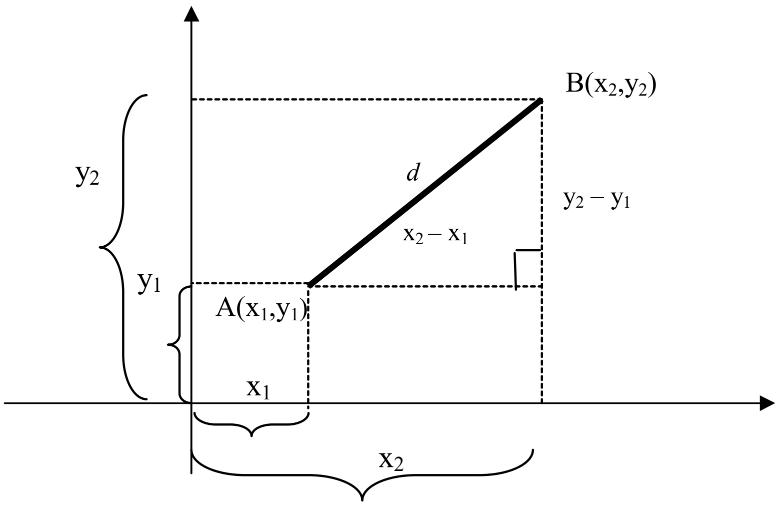
GEOMETRÍA ANALÍTICA

CONCEPTOS BÁSICOS:

1. Distancia entre dos puntos

DEFINICIÓN: En geometría se define la distancia entre dos puntos como la longitud del segmento de recta que une a estos dos puntos. Esto nos hace recordar un postulado Euclideano muy importante: **"La distancia más corta entre dos puntos es la recta que los une"**

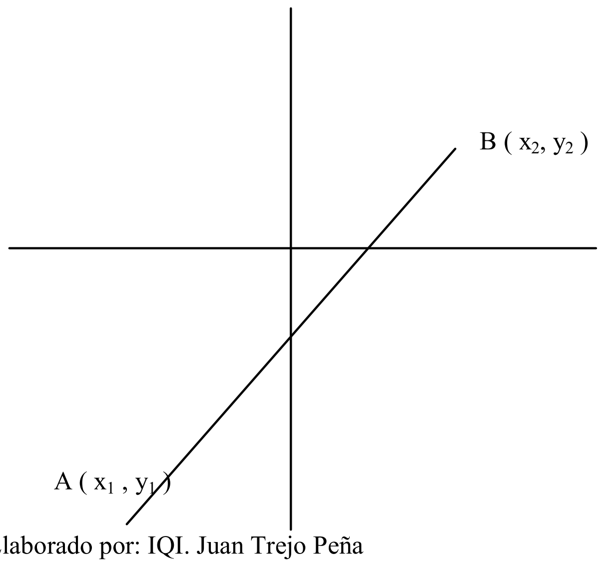
Para poder calcular la distancia entre dos puntos, vamos a echar mano de la trigonometría que estudiamos recientemente. Observa la siguiente figura:



Por medio del teorema de Pitágoras se cumple que $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ la cual es la fórmula analítica de calcular la distancia entre dos puntos.

2. Punto medio de un segmento.

Como el mismo nombre lo indica, es el punto que divide al segmento en dos partes iguales. Para calcular las coordenadas del punto medio de cualquier segmento, se promedian las coordenadas de los extremos.

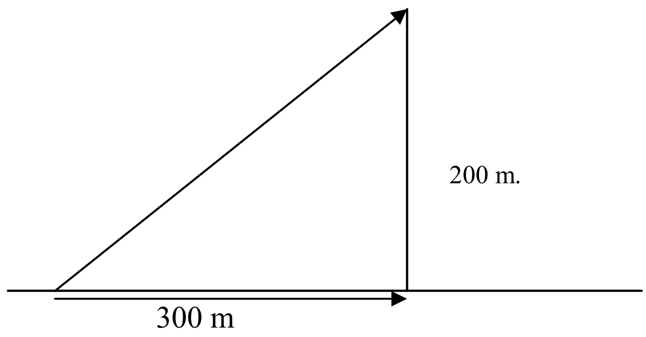


$$PM\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

3. Pendiente de una recta

Considera el siguiente problema.

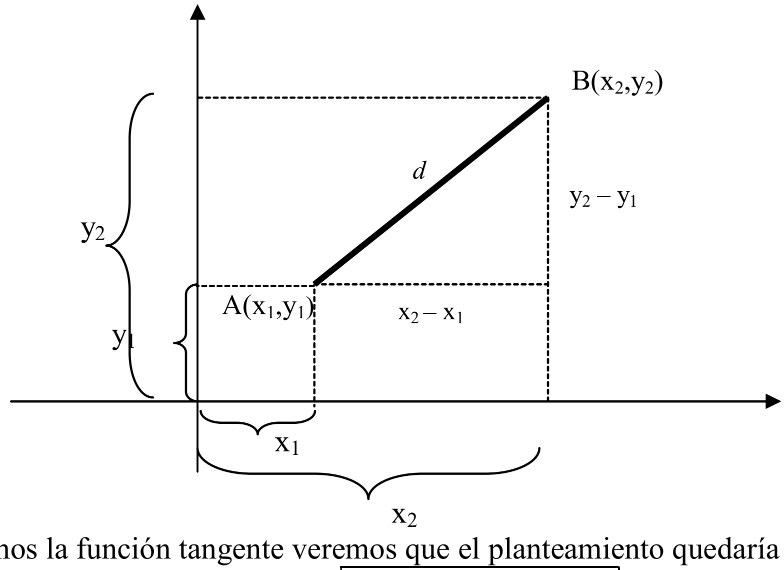
Dos caminantes se encuentran deambulando y cuando llegan al pie de una montaña, deciden separarse sin cambiar de sentido en su andar. Cuando el que siguió sobre el suelo nivelado ha avanzado 300 metros, su compañero, quien subió por la montaña, ha alcanzado una altura de 200 metros. Calcula la pendiente de la ladera de la montaña.



Analizando este sencillo problema, notamos que para calcular la inclinación del terreno (lo cual también se llama pendiente del terreno) se aplicó la función tangente. Pues bien, cuando consideramos solamente líneas rectas, vemos que se forma un triángulo rectángulo y el ángulo de inclinación de la montaña varía de acuerdo con las medidas de los catetos. Lo anterior nos conduce a una definición más forma y analítica de la pendiente de una recta:

La pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de dicha recta.

Retomemos la figura que nos sirvió para obtener la fórmula de la distancia entre dos puntos



Si aplicamos la función tangente veremos que el planteamiento quedaría así:

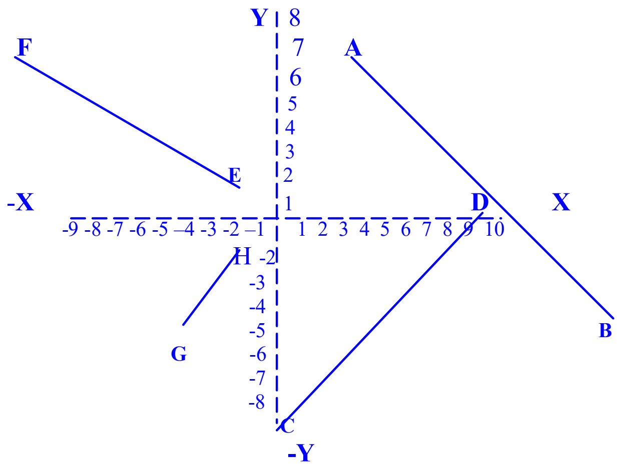
$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

donde ***m*** es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta

EJERCICIOS RESUELTOS

1.-En un sistema de coordenadas cartesianas, situar los siguientes puntos y calcular sus distancias respectivas a) A(3,7) y B(17,–5) b) C(O,–9) y D(9,0) c) E(–2,2) y F(–11,7) d) G(–4,–6) y H(–2,–I)

Solución:



$D_{AB}= \sqrt{(17-3)^2+(-5-7)}^{2} = \sqrt{196+144} = \sqrt{340} = 18.43$

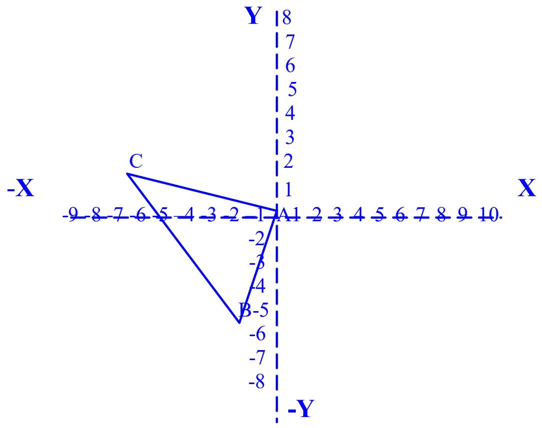
$D_{CD}= \sqrt{(9-0)^2+(0+9)^2} = \sqrt{81+81} = \sqrt{162} = 12.73$

$D_{EF}= \sqrt{(-11+2)^2+(7-2)^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106} = 10.30$

$D_{GH}= \sqrt{(-2+4)^2+(-1+6)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} = 5.39$

2.- **Encuentre el perímetro del triángulo cuyos vértices son A(0,0), B(–I,–5) y C(–,2)**

Solución:



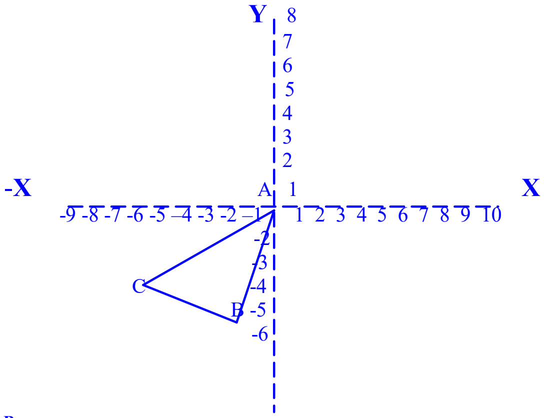
$D_{AB}= \sqrt{1+25} = \sqrt{26} = 5.1$

$D_{AC}= \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 6.32$

$D_{BC}= \sqrt{25+49} = \sqrt{74} = 8.60$ → Perímetro = 5.1+6.32+8.60= 20.02

3.- **Demuestre que el triángulo cuyos vértices son A(0,0), B(–I,–5) y C(–6,–4) es isósceles**.

Solución:

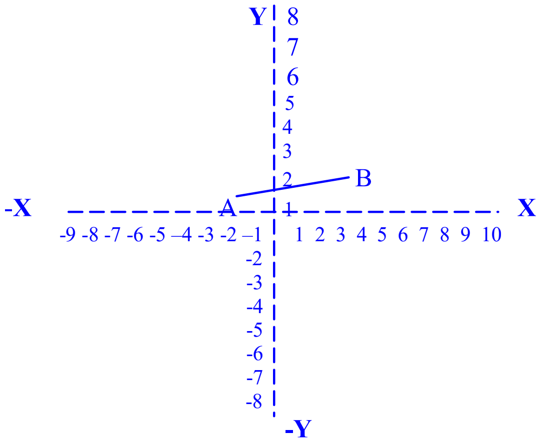


D_{BC} = D_{AB}

$\sqrt{1+25} = \sqrt{1+25}$ → $\sqrt{26} = \sqrt{26}$ → **el Triángulo es Isósceles**

4.- **Hallar el punto medio del segmento cuyos extremos son (–2,1) y (4,2)**

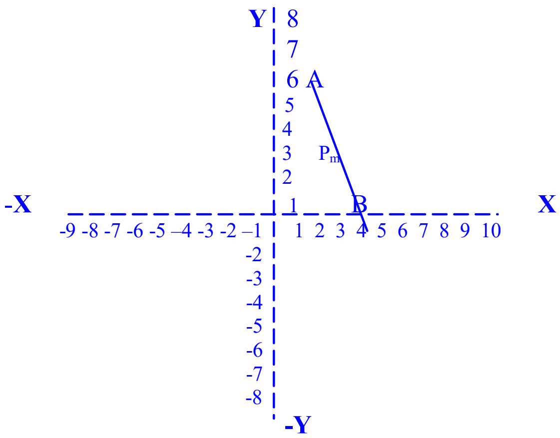
Solución:



$x_m = -2+4 / 2 = 1$, $y_m = 1+2 /2 = 3/2$ → $P_m = (1, 3/2)$

5.- El punto (2,6) es un extremo del segmento cuyo punto medio es (3,3). Cuáles son las coordenadas del otro extremo del segmento.

Solución:

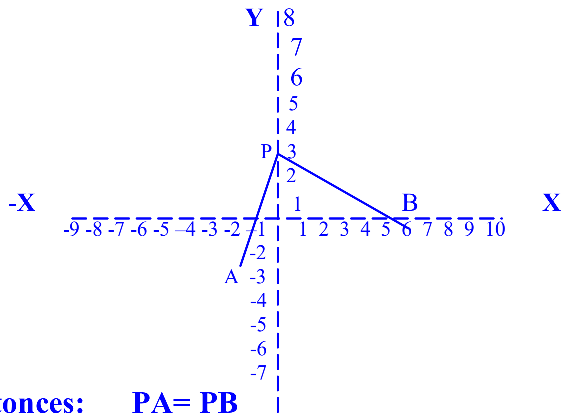


$x_m = (x_1+x_2) /2$, $y_m = (y_1+y_2) / 2$

$3 = x+2/ 2$ → $x= 6-2 = 4$ y $3= y+6 /2$ → $y = 6-6 = 0$ → **B (4,0)**

6.- Determinar el punto que pertenece al eje "Y" y que equidista de los puntos (–2,–3) y (6,1).

Solución:



Si equidista, entonces: PA= PB

$$\sqrt{36+(y-1)^2} = \sqrt{4+(y+3)^2}$$

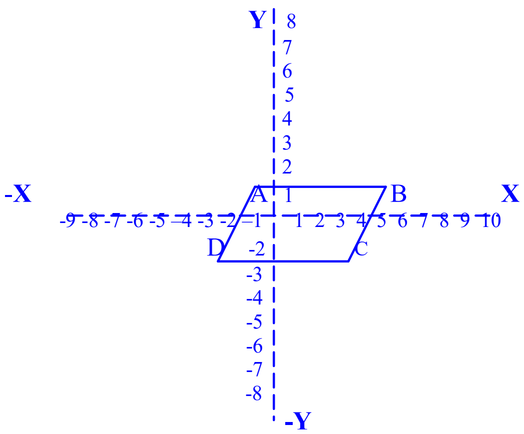
$$y^2 - 2y + 1 + 36 = y^2 + 6y + 9 + 4$$

$$37 - 13 = 6y + 2y \to y = 24/8 = 3$$

→ P (0,3)

7.- Demostrar que el cuadrilátero con vértices A(–1,1), B(6,1), C(4,–2) y D(–3,–2) es un paralelogramo.

Solución:



$m_{AD} = m_{BC}$

m_{AD} = -2-1 / -3+1 = -3/-2 = 3/2 m_{BC}= -2-1 / 4-6 = -3/-2 = 3/2

→ Los lados opuestos AD y BC son paralelos

¿ $m_{AB} = m_{DC}$?

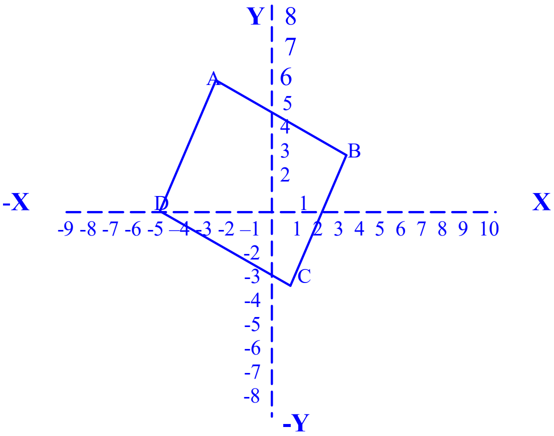
m_{AB}= 1-1 / 6+1 = 0/7 = 0   y m_{DC} = -2-2/ 4+3 = 0/7 =0

Tambièn AB y DC son lados paralelos

→ el cuadrilátero ABCD es paralelogramo.

8.- **Demostrar que el cuadrilátero con vértices A(–2,6), B(4,3), C(1,–3) y D(–5,0) es un cuadrado**.

Solución:



Para que el cuadrilátero sea cuadrado debe cumplir que: AB=BC=CD=DA
Y además que las pendientes deben ser perpendiculares: $m_{AB} \perp m_{AD}$ y $m_{AB} \perp m_{BC}$

Solución:

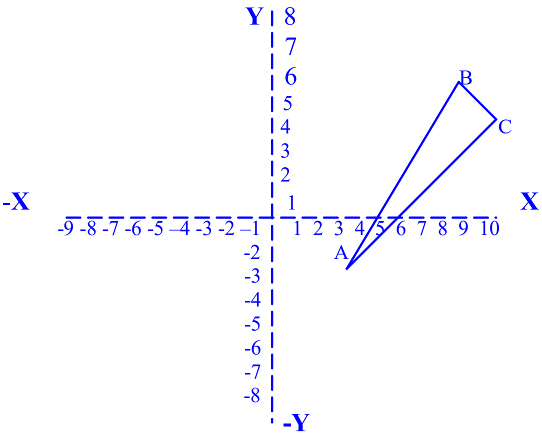
$$d_{AB} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} \qquad d_{BC} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$
$$d_{CD} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} \qquad d_{DA} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

Se cumple la primera condición

m_{AB} = 3-6/4+2 = <u>- ½</u> y m_{AD}= 0-6/-5+2 <u>= 2</u> → AB ⊥ AD
m_{AB} = <u>-1/2</u> y m_{BC} = -3-3 / 1-4 = <u>2</u> → AB ⊥ BC
Se cumple la segunda condición

9.- Compruebe que el triángulo A (3,–2), B(9,6) y C(10,5) es rectángulo en C.

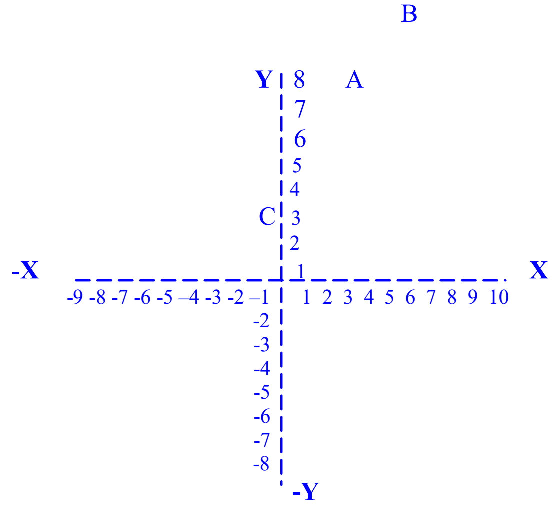
Solución:



Para que sea rectángulo el triángulo debe cumplir que $m_{BC} \perp m_{AC}$
m_{BC} = 5-6/10-9 <u>= -1</u> y m_{AC} = -2-5/3-10 <u>= 1</u>
→ <u>el triángulo es rectángulo</u>

10.- Calcúlese el valor que debe tener "a" para que los puntos A(a, 8), B(2a, 13) y C(0,a) estén alineados.

Solución:



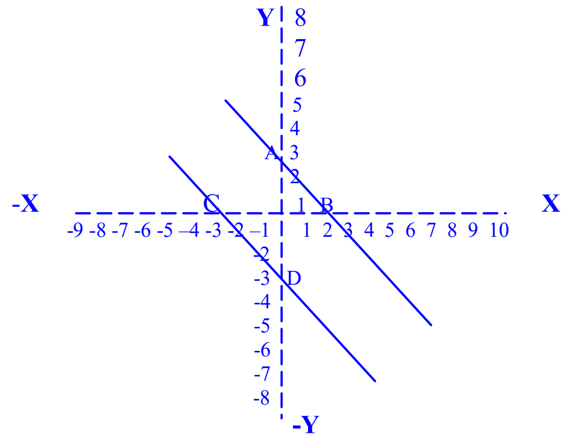
$m_{AB} = m_{BC}$ ya que son pendientes de la misma recta

$m_{AB} = m_{BC}$ → 13-8/2a-a = a-13/0-2a → 5/a = a-13/-2a
-10 a = a^2 –13 a → a(a-3) = 0 a= 0 y a=3

Para que estén alineados las coordenadas deben ser: A(38),B(6,13) y C(0,3)
O bién A(0,8),B(0,13) y C(0,0)

11.- Comprobar que son paralelas las rectas que pasan por los puntos A(0,3), B(2,0) y C(–2,0), D(O,–3).

Solución:



$m_{AB} = m_{DC}$ para que sean paralelas las rectas. →
m_{AB} = 0-3 / 2-0 = - 3/2 y m_{DC} = -3-0 / 0+2 = - 3/2
las rectas son paralelas