

Cálculo vectorial

Ejercicios unidad 13.2 - Límites y Continuidad

En los ejercicios 5 a 8, hallar el límite indicado utilizando los límites.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = 3$$

$$5) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) - g(x,y)]$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) - \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) \\ = 4 - 3 = \boxed{1} \end{aligned}$$

$$8) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left[\frac{f(x,y) + g(x,y)}{f(x,y)} \right]$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) &= \frac{4 + 3}{4} = \boxed{\frac{7}{4}} \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) &= 4 \end{aligned}$$

En los ejercicios 9-22, Calcular el límite y analizar la Continuidad de la función.

$$9) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (2x^2 + y)$$

$$SD = 2(2)^2 + (1) = 8 + 1 = \boxed{9}$$

$2x^2 + y$ es Continua

$$15) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$SD = \frac{(1)(1)}{(1)^2 + (1)^2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Continuidad

$\frac{xy}{x^2 + y^2}$ Continua excepto en $(0,0)$

En los ejercicios 23 a 36, hallar el límite (si existe). Si el límite no existe, explicar por qué.

$$25) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x+y}$$

$$SD = \frac{1}{0+0} = \frac{1}{0} \text{ NE, el límite no existe}$$

Porque con eje x sería $\frac{1}{x}$ y eje y $\frac{1}{y}$ son distintos.

$$27) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$$

$$SD = \frac{(2)^2 - (2)^2}{(2) - (2)} = \frac{0}{0} \text{ C.I.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} x+y$$

$$SD = 2+2 = \underline{\underline{4}}$$

$$28) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 4y^4}{x^2 + 2y^2}$$

$$(x,y) \rightarrow (0,0) \quad x^2 + 2y^2$$

$$SO = \frac{(0)^4 - 4(0)^4}{(0)^2 + (2)(0)^2} = \frac{0}{0} \quad C.I$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 + 2y^2)(x^2 - 2y^2)}{x^2 + 2y^2}$$

$$(x,y) \rightarrow (0,0) \quad x^2 + 2y^2$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - 2y^2 = SO = 0^2 - 2(0)^2 = \boxed{0}$$

$$(x,y) \rightarrow (0,0)$$

En los ejercicios 53 a 58, utilizar las Coordenadas Polares para hallar el límite.

[Sugerencia tomar $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$ y observar que $(x,y) \rightarrow (0,0)$ implica $r \rightarrow 0$]

$$53) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$(x,y) \rightarrow (0,0) \quad x^2 + y^2$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos \theta)(r \sin \theta)^2}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^2 (1)}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$SD = 0 \cdot \cos \theta \sin^2 \theta = \boxed{0}$$

$$55) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos \theta)^2 (r \sin \theta)^2}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^2 (1)}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta r^2 \sin^2 \theta}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

$$SD = 0^2 \cdot \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \boxed{0}$$

En los ejercicios 59 a 62, usar las Coordenadas Polares y la regla de L'Hôpital Para encontrar el límite.

$$59) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{r^2 (1)}}{\sqrt{r^2 (1)}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin(r)}{r}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{[\sin(r)]'}{[r]'} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos(r) \cdot (1)}{1}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \cos(r) = \cos(0) = \boxed{1}$$