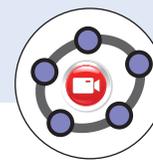


## 4 Hipérbola



### PIENSA Y CALCULA

Halla mentalmente las pendientes de las siguientes rectas: a)  $y = \frac{3x}{4}$  b)  $y = -\frac{3x}{4}$

### EVITAR ERRORES

Si los focos están en el eje  $Y$ , la constante es igual a  $2b$

### 4.1 Hipérbola

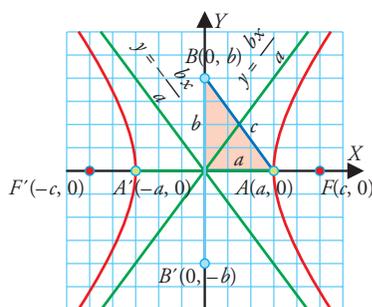
Una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a  $2a$ . La hipérbola tiene dos ramas.

### Ecuación reducida

#### Focos en el eje $X$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

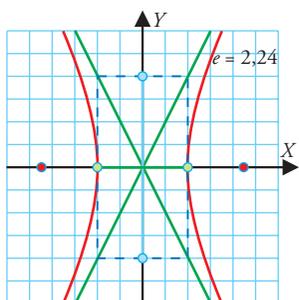
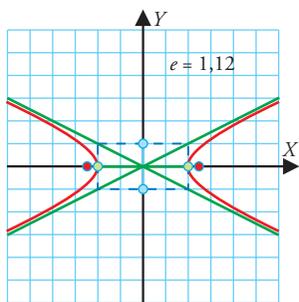
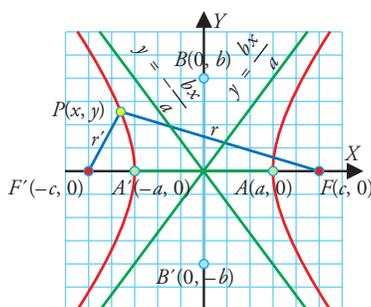
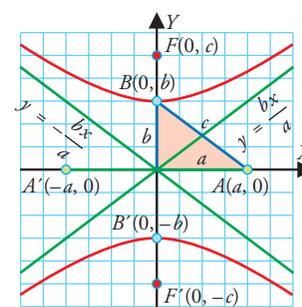
Relación fundamental:  
 $c^2 = a^2 + b^2$



#### Focos en el eje $Y$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Relación fundamental:  
 $c^2 = a^2 + b^2$



### Elementos de la hipérbola con los focos en el eje $X$

#### • Puntos:

- Centro:** es el punto de intersección de los ejes:  $O(0, 0)$
- Vértices:** son los puntos:  $A(a, 0)$ ,  $A'(-a, 0)$ ,  $B(0, b)$  y  $B'(0, -b)$
- Focos:** son los puntos fijos:  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$

#### • Segmentos:

- Eje principal o eje focal:** es el segmento  $AA'$ , cuya longitud es  $d(A, A') = 2a$
- Eje secundario:** es el segmento  $BB'$ , cuya longitud es  $d(B, B') = 2b$
- Distancia focal:** es la longitud del segmento  $FF'$ :  $d(F, F') = 2c$
- Radiovectores:** son los segmentos  $r = PF$  y  $r' = PF'$

#### • Rectas:

**Asíntotas:**  $y = \frac{b}{a}x$ ,  $y = -\frac{b}{a}x$

Para dibujar una hipérbola a mano alzada, se hace un rectángulo centrado en el origen, de longitud  $2a$  y altura  $2b$ ; las diagonales prolongadas son las asíntotas. Se trazan estas y la hipérbola.

#### • Excentricidad:

La **excentricidad de una hipérbola** es el cociente:  $e = c/a$

Como en una hipérbola  $0 < a < c$ , la excentricidad será siempre positiva y mayor que 1. Si la excentricidad es pequeña, cercana a uno, las ramas de la hipérbola se cierran, y si es grande, se abren.

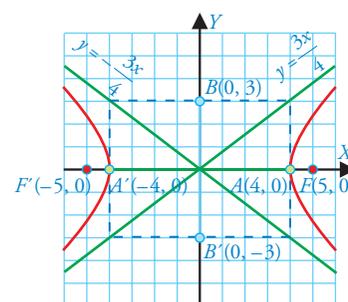
### EJERCICIO RESUELTO

- 9** Se tiene una hipérbola en la que  $a = 4$ ,  $c = 5$  y los focos están en el eje  $X$ . Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.

Aplicando la relación fundamental o teorema de Pitágoras, se tiene:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow b = \sqrt{25 - 16} = 3 \Rightarrow \text{ecuación reducida: } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

- Puntos:
  - a) Centro:  $O(0, 0)$
  - b) Vértices:  $A(4, 0)$ ,  $A'(-4, 0)$ ,  $B(0, 3)$  y  $B'(0, -3)$
  - c) Focos:  $F(5, 0)$ ,  $F'(-5, 0)$
- Segmentos:
  - a) Eje principal:  $2 \cdot 4 = 8$
  - b) Eje secundario:  $2 \cdot 3 = 6$
  - c) Distancia focal:  $2 \cdot 5 = 10$
- Excentricidad:  $e = \frac{5}{4} = 1,25$
- Rectas, asíntotas:  $y = \frac{3x}{4}$ ,  $y = -\frac{3x}{4}$



## 4.2 Hipérbola centrada en el punto $C(m, n)$

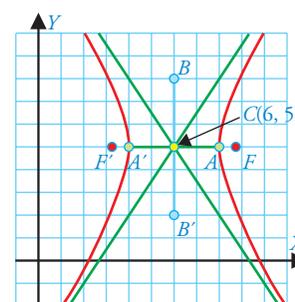
La ecuación reducida de una hipérbola de centro el punto  $C(m, n)$  se obtiene haciendo una traslación;  $x$  se sustituye por  $x - m$ , e  $y$ , por  $y - n$

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$$

### EJERCICIO RESUELTO

- 10** Halla la ecuación de una hipérbola que tiene el centro en el punto  $C(6, 5)$  y en la que  $a = 2$  y  $b = 3$

$$\frac{(x - 6)^2}{4} - \frac{(y - 5)^2}{9} = 1$$



## 4.3 Hipérbola equilátera

Una **hipérbola equilátera** es una hipérbola en la que  $a = b$ ; por tanto, la ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

Las asíntotas son:  $y = x$ ,  $y = -x$

Si se gira  $45^\circ$ , se obtiene la hipérbola correspondiente a la función de proporcionalidad inversa:  $xy = k \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}$

### EJERCICIO RESUELTO

- 11** Dibuja la hipérbola equilátera:  $y = \frac{3}{x}$

