Ejercicios de Cálculo Vectorial

Unidad 14.1 → Integrales iteradas y área en el plano.

En los ejercicios 11 a 30, evaluar la integral iterada.

13) $\int_1^2 \int_0^4 (x^2 - 2y^2)\,dx\,dy$

$$I = \int_0^4 (x^2 - 2y^2)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2y^2 x \Big|_0^4 = \left(\frac{4^3}{3} - 2y^2(4)\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2y^2(0)\right)$$

$$= \frac{64}{3} - 8y^2$$

$$\int_1^2 \frac{64}{3} - 8y^2\,dy = \frac{64y}{3} - \frac{8y^3}{3} \Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{64(2)}{3} - \frac{8(2)^3}{3}\right) - \left(\frac{64(1)}{3} - \frac{8(1)^3}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{128}{3} - \frac{64}{3}\right) - \left(\frac{64}{3} - \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{64}{3}\right) - \left(\frac{56}{3}\right)$$

$$= \frac{64-56}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

17) $\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} x} (1+\cos x)\, dy\, dx$

$I = \int_0^{\operatorname{sen} x} (1+\cos x)\, dy$

$= y + \cos(x)\, y \Big|_0^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x + \cos(x)\operatorname{sen}(x)$

$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x) + \cos(x)\operatorname{sen}(x)\, dx$

$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\, dx + \int_0^{\pi} \cos(x)\operatorname{sen}(x)\, dx$

$-\cos(x)\Big|_0^{\pi} + \quad u = \operatorname{sen}(x)\, dx$

$du = \cos(x)\, dx$

$(-\cos(\pi) + \cos(0)) + \int_p^9 u\, du$

$(-(-1)+1) \quad + \frac{u^2}{2}\Big|_p^9$

$(2) + \frac{\operatorname{sen}(x)^2}{2}\Big|_0^{\pi} = 2 + \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi)^2}{2} - \frac{\operatorname{sen}(0)^2}{2}\right)$

$= 2 + (0-0) = \boxed{2}$

25) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\, dx\, dy$

$$I = \int_0^{\sqrt{4-y^2}} 2(4-y^2)^{-1/2}\, dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4-y^2}} x \Big|_0^{\sqrt{4-y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-y^2}} \left(\sqrt{4-y^2}\right) = 2$$

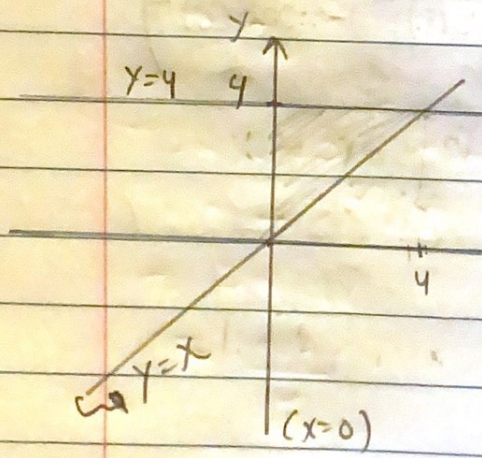
$$\int_0^2 2\, dy = 2y \Big|_0^2 = 2(2) - 2(0) = \boxed{4}$$

En los ejercicios 47 a 54, dibujar la región R de integración y cambiar el orden de integración.

47) $\int_0^4 \int_0^y f(x,y)\, dx\, dy$

R: $0 \le x \le y$; $x=0$, $x=y$; $y=0$, $y=4$

$0 \le y \le 4$



R: $x \le y \le 4$

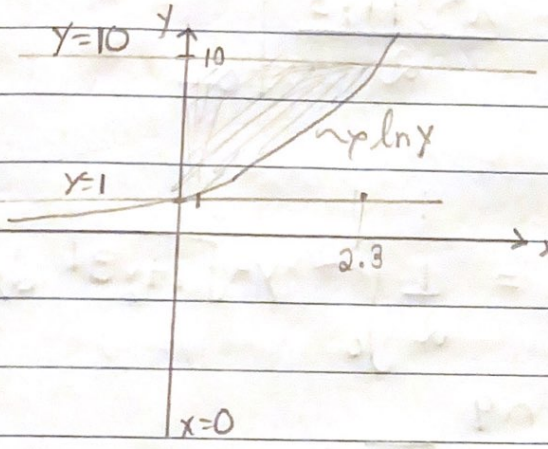
$0 \le x \le 4$

$$\int_0^4 \int_x^4 f(x,y)\, dy\, dx$$

51) $\int_1^{10} \int_0^{\ln y} f(x,y)\, dx\, dy$

R: $0 \le x \le \ln y$; $x=0$, $x=\ln y$

$1 \le y \le 10$ $\quad y=1$, $y=10$



$x = \ln(y)$ $\quad e^{\ln(y)}$

$e^x = e^{\ln(y)}$

$e^x = y$

R: $e^x \le y \le 10$

$0 \le x \le \ln 10$

$$\int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} f(x,y)\, dy\, dx$$

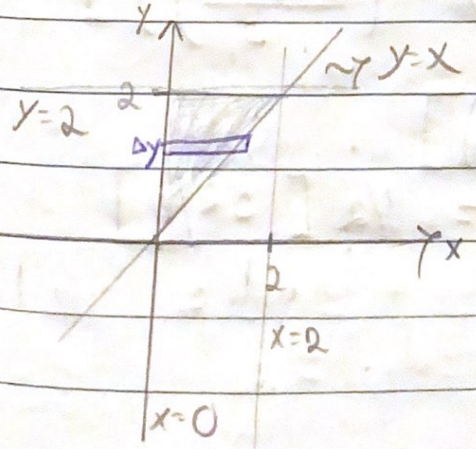
En los ejercicios 67 a 72, trazar la región de integración. Después evaluar la integral iterada. (Observar que es necesario cambiar el orden de integración).

67) $\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\, dy\, dx$

Cambiar el orden

R: $x \le y \le 2$

$0 \le x \le 2$



R: $0 \le x \le y$

$0 \le y \le 2$

$$\int_0^2 \int_0^y x\sqrt{1+y^3}\, dx\, dy$$

$$\int_0^2 \int_0^y x\sqrt{1+y^3}\, dx\, dy$$

$$\int_0^y x\sqrt{1+y^3}\, dx = \left.\frac{x^2\sqrt{1+y^3}}{2}\right|_0^y$$

$$= \frac{y^2\sqrt{1+y^3}}{2}$$

$$\int_0^2 \frac{y^2\sqrt{1+y^3}}{2}\, dy = \frac{1}{2}\int_0^2 y^2\sqrt{1+y^3}\, dy$$

$u = 1+y^3\, dy$
$du = 3y^2\, dy$
$\frac{du}{3} = y^2 dy$

$$\frac{1}{2}\int_p^9 \sqrt{u}\,\frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{(u)^3}}{3}\right)\Big|_p^9\right]$$

$$= 1/2\left[1/3\left(\frac{2\sqrt{(1+y^3)^3}}{3}\right)\Big|_0^2\right]$$

$$= 1/2\left[1/3\left(\left(\frac{2\sqrt{(1+8)^3}}{3}\right) - \left(\frac{2\sqrt{(1+0)^3}}{3}\right)\right)\right]$$

$$= 1/2\left[1/3\,(54/3) - (2/3)\right]$$

$$= 1/2\,[54/9 - 2/9] = 1/2\,[52/9]$$

$$= 52/18$$

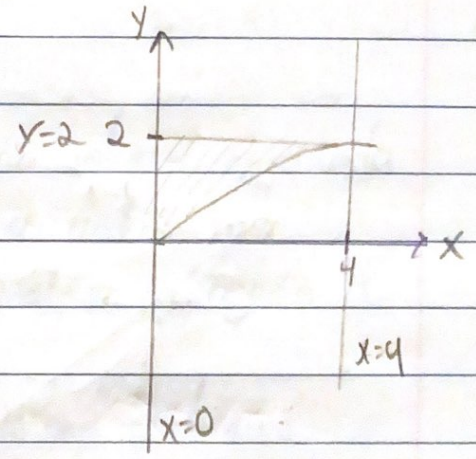
$$= \boxed{\frac{26}{9}}$$

68) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{3}{2+y^3}\, dy\, dx$

Cambiar el orden

$R: \quad \sqrt{x} \le y \le 2$

$0 \le x \le 4$



$R: \quad 0 \le x \le y^2$

$0 \le y \le 2$

$\int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{3}{2+y^3}\, dx\, dy$

$I = \int_0^{y^2} \frac{3}{2+y^3}\, dx = \frac{3}{2+y^3} x \Big|_0^{y^2}$

$= \frac{3y^2}{2+y^3}$

$\int_0^2 \frac{3y^2}{2+y^3}\, dy = \quad u = 2+y^3$

$du = 3y^2\, dy$

$\int_\rho^9 \frac{du}{u}$

$= \ln|u| \Big|_\rho^9 = \ln|2+y^3| \Big|_0^2$

$= \ln|2+2^3| - \ln|2+0^3|$

$= \ln|10| - \ln|2|$

$= \ln\left|\frac{10}{2}\right| = \ln|5| \approx 1.6094$