# Teoría – Tema 6

# Teoría - 8 - Operaciones elementales con matrices

## Matriz traspuesta, simétrica y diagonal

Dada la matriz $A=(a_{ij})$ de orden $m\times n$, se llama **traspuesta** de $A$ y la representamos por $A^t$, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas.

Es decir: la primera fila de $A$ es la primera columna de $A^t$, la segunda fila de $A$ es la primera columna de $A^t$, etc.

**Ejemplo 1 resuelto**

Si $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix} \rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

Si $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix} \rightarrow B^t=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$

Una **matriz simétrica** es una matriz cuadrada que coincide con su traspuesta. Es decir, $A$ es simétrica si y solo si cumple $A=A^t$.

Es obvio que solo las matrices cuadradas pueden ser simétricas. Las matrices rectangulares, al no coincidir el número de filas con el número de columnas, nunca serán simétricas.

**Ejemplo 2 resuelto**

La matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ es simétrica, ya que $A=A^t=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

La matriz $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 6\\ 1 & -1 & 5\\ 6 & 5 & 0\end{pmatrix}$ es simétrica, ya que $B=B^t=\begin{pmatrix}4 & 1 & 6\\ 1 & -1 & 5\\ 6 & 5 & 0\end{pmatrix}$.

La matriz $D=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ 1 & -1 & 3\\ 7 & 7 & -10\end{pmatrix}$ no es simétrica, ya que. $D\neq D^t=\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ -1 & -1 & 7\\ 5 & 3 & -10\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Es un ejemplo de matriz cuadrada no simétrica.

La matriz $C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ no es simétrica, ya que $C\neq C^t=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ → Las matrices rectangulares nunca son simétricas.

La matriz traspuesta cumple las siguientes propiedades:

- $\forall\ A\in M_{m\times n}\ \ (A^t)^t=A$ → La traspuesta de la traspuesta coincide con la matriz de partida.
- $\forall\ A, B\in M_{m\times n}\ \ (A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$ → La traspuesta del producto de matrices es la traspuesta de la segunda matriz por la traspuesta de la primera.
- $\forall\ A, B\in M_{m\times n}\ \ (A+B)^t=A^t+B^t$ → La traspuesta de la suma de matrices es la traspuesta de la primera matriz más la traspuesta de la segunda.
- $\forall\ A, B\in M_{m\times n}\ \ (A-B)^t=A^t-B^t$ → La traspuesta de la diferencia de matrices es la traspuesta de la primera matriz menos la traspuesta de la segunda.
- $\forall\ \alpha\in\mathbb{R},\ \forall\ A\in M_{m\times n}\ \ (\alpha\cdot A)^t=\alpha\cdot A^t$ → La traspuesta de un escalar por una matriz es el escalar por la matriz traspuesta.

Además de estas propiedades de las matrices traspuestas, indicamos ciertas propiedades de simetría útiles en la resolución de problemas con matrices:

- La matriz $B=A+A^t$ es una matriz simétrica.
- Si $A=-A^t$ se dice que $A$ es antisimétrica.
- La matriz $C=A-A^t$ es antisimétrica, ya que cumple $C=-C^t$ .
- Una matriz $A$ siempre se puede descomponer en suma de una matriz simétrica $S=\frac{1}{2}(A+A^t)$ y una matriz antisimétrica $H=\frac{1}{2}(A-A^t)$ de la forma $A=S+H$ .

La **diagonal principal** de una matriz está formada por los elementos $a_{ij}$ con $i=j$ : { $a_{11}$ , $a_{22}$ , $a_{33}$ ,..., $a_{mm}$ }

Para matrices cuadradas de orden $n=3$ la diagonal principal la forman los elementos: { $a_{11}$ , $a_{22}$ , $a_{33}$ }

Los elementos $a_{ij}$ con $i+j=n+1$ forman la **diagonal secundaria**. Para matrices cuadradas de orden $n=3$ la diagonal secundaria la forman los elementos: { $a_{13}$ , $a_{22}$ , $a_{31}$ }

Una matriz cuadrada es **triangular** cuando todos los términos por encima o por debajo de la diagonal principal son cero.

Si todos los elementos que no están en la diagonal principal son cero, hablamos de matriz **diagonal**.

En una matriz diagonal con todos los los elementos de la diagonal principal iguales, se dice **matriz escalar**. Un caso particular de matriz escalar es aquella que tiene $a_{ij}=1$ con $i=j$ , y que recibe el nombre de **matriz unidad**.

**Ejemplo 3 resuelto**

Ejemplo de matriz diagonal $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

Ejemplo de matriz escalar $B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$

Ejemplo de matriz unidad $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

# Suma de matrices y producto de escalar por matriz

En el conjunto de matrices $M_{m\times n}$ se puede definir la suma de matrices. Si $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ son dos matrices de orden $m\times n$, su suma resulta:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \dots & a_{3n}+b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, la suma $A+B$ se obtiene sumando los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas matrices. Obviamente, **la suma de matrices solo se define si ambas matrices son del mismo orden** $m\times n$.

El producto de un escalar $\lambda\in\mathbb{R}$ por una matriz $A=(a_{ij})$ de orden $m\times n$ se define:

$$\lambda\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \dots & \lambda a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz $\lambda\cdot A$ se obtiene multiplicando por $\lambda$ cada elemento de la matriz $A$.

**Ejemplo 1 resuelto**

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -4 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 18 & -6 \end{pmatrix}$$

**Propiedades de la suma de matrices** de orden $m \times n$ :

- Conmutativa. $A+B=B+A, \ \forall \ A, B \in M_{m \times n}$
- Asociativa. $(A+B)+C=A+(B+C), \ \forall A, B, C \in M_{m \times n}$ .
- Elemento neutro. La matriz cero de orden $m \times n$ , con todos los términos $a_{ij}=0$ , es el elemento neutro ya que cumple $A+0=A$ .
- Elemento simétrico. Es la matriz $A=(a_{ij})$ cambiada de signo es todos sus términos o elementos: $A+(-A)=0$ , donde $-A=(-a_{ij})$ . El elemento simétrico de la suma también se llama elemento opuesto. Por definición, una matriz más su elemento simétrico da lugar al elemento neutro de la suma de matrices.

El producto de **un escalar por una matriz tiene las siguientes propiedades** $\forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \forall \ A \in M_{m \times n}$ :

- $\lambda \cdot (A+B)=\lambda \cdot A+\lambda \cdot B$
- $(\lambda+\mu) A=\lambda \cdot A+\mu \cdot A$
- $(\lambda \cdot \mu) A=\lambda \cdot (\mu \cdot A)$
- $1 \cdot A=A$

El conjunto de matrices $M_{m \times n}$ con las propiedades aquí definidas, tiene estructura matemática de espacio vectorial (la misma estructura que el año pasado estudiamos para vectores en el conjunto $V^n$ ).