Mittwoch, 18. März 2020 10:58

Im Folgenden untersuchen Sie die Funktionsschar

$$f_a(x) = -\frac{x^2}{a} - 3\,a + 4\,x, a \neq 0$$

a) Begründen Sie, warum $a \neq 0$ gelten muss!

Man darf durch 0 nicht teilen!

b) Berechnen Sie $f_2(3)$.

$$f_2(3) = -\frac{3^2}{2} - 3\cdot 2 + 4\cdot 3$$
$$= -\frac{9}{2} - 6 + 12$$
$$= -\frac{9}{2} + 6$$
$$= -\frac{9}{2} + \frac{12}{2} = \frac{3}{2} = \underline{\underline{1{,}5}}$$

c) Die Funktion g, mit $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4\,x - \frac{9}{2}$ ist eine Funktion der Schar. Bestimmen Sie den Parameter a.

$$f_a(x) = -\frac{x^2}{a} - 3\,a + 4\,x, a \neq 0$$

$$-3a = -\frac{9}{2} \quad | : (-3)$$
$$a = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{x^2}{a} = -\frac{2}{3}x^2 \quad | : (-x^2)$$
$$\frac{1}{a} = \frac{2}{3} \quad | \uparrow(-1)$$
$$a = \frac{3}{2}$$

d) Zeigen Sie, dass jede Funktion der Schar bei $x = a$ eine Nullstelle besitzt.

$$f_a(x) = -\frac{x^2}{a} - 3\,a + 4\,x, a \neq 0$$

$$f_a(a) = -\frac{a^{\cancel{2}}}{\cancel{a}} - 3a + 4a$$
$$= -a - 3a + 4a$$
$$= -4a + 4a = 0$$

$= -a - 3a + 4a$

$= -4a + 4a = 0$

e) Gegeben sind die Punkte $A(1|1)$ und $B(2|1)$

(1) Zeigen Sie, dass der Punkt $A(1|1)$ auf keinem Graphen der Schar liegt.

(2) Bestimmen Sie die zwei Funktionen der Schar, auf deren Graphen der Punkt B liegt.

$$f_a(x) = -\frac{x^2}{a} - 3\,a + 4\,x, a \neq 0$$

$f_a(1) = 1$

$-\frac{1^2}{a} - 3a + 4 \cdot 1 = 1$

$-\frac{1}{a} - 3a + 4 = 1 \quad | \cdot (-a)$

$1 + 3a^2 - 4a = -a \quad | + a$

$1 + 3a^2 - 3a = 0 \quad | : 3$

$a^2 - a + \frac{1}{3} = 0 \quad | \; p = -1, \; q = \frac{1}{3}$ $\qquad x_{1/2} = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 - q}$

$a_{1/2} = -\frac{1}{2} \cdot (-1) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot (-1)\right)^2 - \frac{1}{3}}$

$a_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}}_{<0}}$ $\Rightarrow$ Es gibt keine Lösung

$\Rightarrow$ Es gibt keine Funktion in der Schar, für die $A(1|1)$ auf dem Graphen liegt

e) Gegeben sind die Punkte $A(1|1)$ und $B(2|1)$

(1) Zeigen Sie, dass der Punkt $A(1|1)$ auf keinem Graphen der Schar liegt.

(2) Bestimmen Sie die zwei Funktionen der Schar, auf deren Graphen der Punkt B liegt.

$$f_a(x) = -\frac{x^2}{a} - 3\,a + 4\,x, a \neq 0$$

$f_a(2) = 1$

$-\frac{4}{a} - 3a + 8 = 1 \quad | -1$

$-\frac{4}{a} - 3a + 7 = 0 \quad | \cdot (-a)$

$4 + 3a^2 - 7a = 0 \quad |:3$

$a^2 - \frac{7}{3}a + \frac{4}{3} = 0 \quad \Big| \; p = -\frac{7}{3}, \; q = \frac{4}{3} \qquad x_{1/2} = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 - q}$

$a_{1/2} = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)\right)^2 - \frac{4}{3}}$

$a_{1/2} = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36} - \frac{4}{3}}$

$a_{1/2} = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36} - \frac{48}{36}}$

$a_{1/2} = \frac{7}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36}}$

$a_{1/2} = \frac{7}{6} \pm \frac{1}{6} \qquad a_1 = \frac{6}{6} = 1$

$a_2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

f_1 und $f_{4/3}$ erfüllen die Bedingung

f) Zeigen Sie, dass die Funktionen der Schar für $a > 0$ bei HP$(2a|a)$ einen Hochpunkt besitzen.

$f_a(x) = -\frac{x^2}{a} - 3a + 4x, a \neq 0$

$f_a'(x) = -\frac{2x}{a} + 4$

$f_a'(x) = 0 \qquad -\frac{2x}{a} + 4 = 0 \quad |-4$

$-\frac{2x}{a} = -4 \quad |\cdot a$

$-2x = -4a \quad |:(-2)$

$x = \underline{\underline{2a}}$

Vorfaktor vor x^2:

$-\frac{1}{a} < 0$ wenn $a > 0$

Für $a > 0$ sind die Graphen von f_a nach unten geöffnete Parabeln.

$\Rightarrow$ An der Stelle $x = 2a$ ist ein Hochpunkt.

x	0	$x=2a$	$3a$
$f_a'(x)$	4	0	-2

$f_a'(x) = -\frac{2x}{a} + 4$

$f_a'(0) = 4$

$\Rightarrow$ HP an der Stelle $x = 2a$

$f_a'(x) = - \frac{\;\;}{a} + 4$ $\Rightarrow$ HP an der Stelle $x = 2a$

$x = 2a$ ist ein Hochpunkt.

$f_a'(0) = 4$

$f_a'(3a) = -\frac{2 \cdot 3a}{a} + 4 = -6 + 4 = -2$

$$f_a(2a) = -\frac{(2a)^2}{a} - 3a + 4 \cdot 2a$$

$$= -\frac{4a^{\cancel{2}}}{\cancel{a}} - 3a + 8a$$

$$= -4a - 3a + 8a = \underline{\underline{a}}$$

HP$(2a|a)$