A2 Fonctions et taux de variation.

I/ Utilisation des fonctions.

Les fonctions sont des outils mathématiques permettant de modéliser des situations concrètes. Nous en avons découvert une avec le pliage de la bande de papier. Ces fonctions peuvent ensuite être utilisées pour prédire des phénomènes encore non observés. Comme ce fut le cas avec les équations de la relativité d'Einstein qui permirent de prédire en 1916 les ondes gravitationnelles qui ne furent détectées qu'en 2015 soit presque 100 ans plus tard.

II/ Généralités sur les fonctions.

1) Définition, notation et vocabulaire.

Définition : Une fonction numérique associe **à tout nombre** d'un ensemble D_f un nombre réel et un **seul**.

Elle se note de la façon suivante :

L'ensemble

$$f : \quad D_f \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

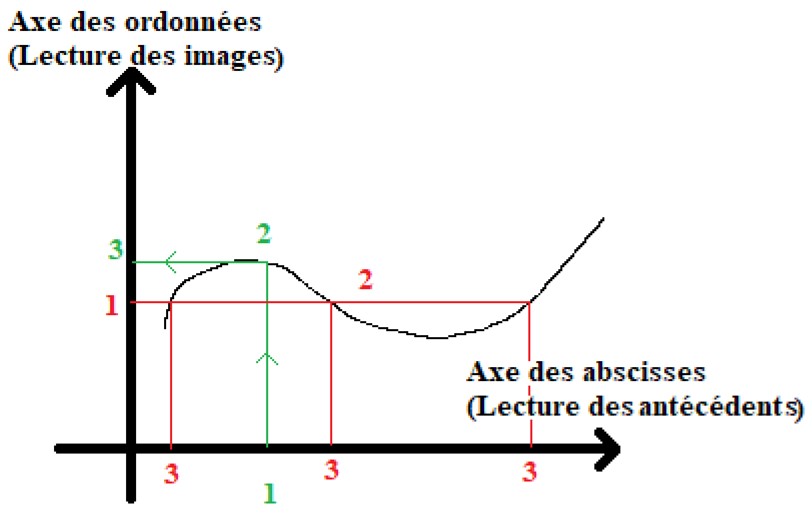
Le nombre associé à *x* par la fonction *f*

- *f* est le nom de la fonction (nous aurions pu choisir *g*, *h*…), *x* est la variable (mais comme pour f nous aurions pu en choisir une autre *t*, *n* …).
- D_f est son ensemble de définition, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs pour lesquelles la fonction donnera un seul et unique résultat. Ici l'ensemble est R mais il aurait pu être différent.
- *y* est le résultat obtenu lorsque l'on « insère » la valeur *x* dans la fonction. On dit que *y* est l'image de *x* par la fonction *f*. On le note $y = f(x)$.
- On dit que x est un antécédent de *y*. Notons qu'il peut y avoir plusieurs antécédents d'une même valeur *y*.
- $f(x)$ est l'expression algébrique de la fonction, c'est la formule qui nous permet de calculer *y* si l'on connait *x*.

Exemple :
Soit la fonction *f* définie [0 ; 5[par $f(x) = x + 1$, on admet que $f(0) = 1$. Cela signifie que :
- Le nom de la fonction est *f*.
- Son ensemble de définition est composé de l'ensemble des nombres compris entre 0 (inclus) et 5 (exclu).
- 1 est l'image de 0 par la fonction *f*.
- 0 est un antécédent de 1 par la fonction *f*.
- L'expression algébrique de la fonction *f* est : $f(x) = x + 1$.

III/ Résoudre graphiquement des équations et inéquations.

1) Rappels de seconde : Lire graphiquement une image ou un antécédent.



Pour lire une image on part de l'axe des abscisses et on arrive sur l'axe des ordonnées.

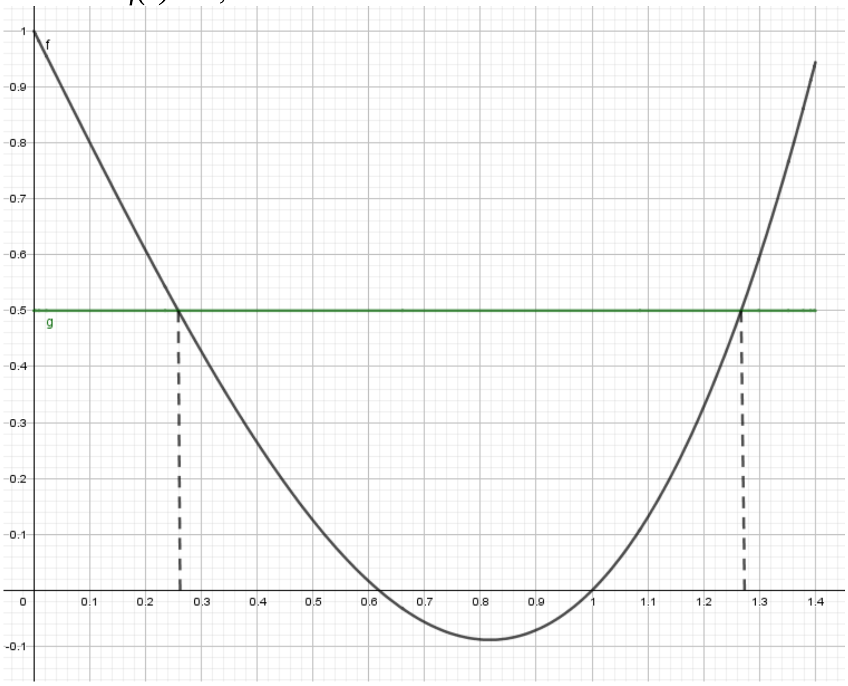
Pour lire le ou les antécédents d'un nombre on part de l'axe des ordonnées et on arrive sur l'axe des abscisses.

2) <u>Résoudre une équation</u> :

Lorsque l'on souhaite résoudre une équation cela reviens à lire les antécédents d'un nombre par la fonction.

Exemple :

Résolvons $f(x) = 0,5$



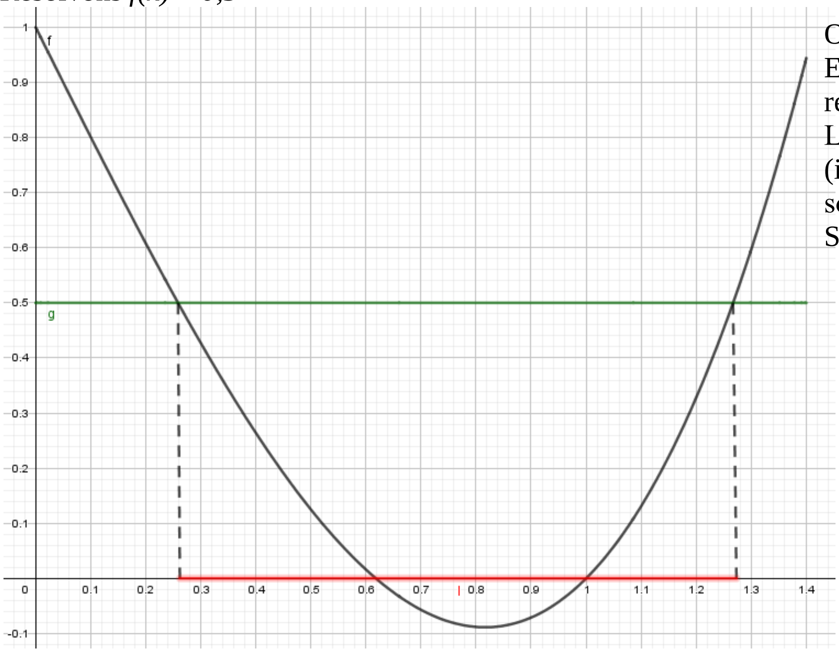
Pour cela on lit simplement les antécédents de 0,5 par *f*.
Ici on obtient 0,27 et 1,27.
Donc les solutions à l'équation $f(x) = 0,5$ sont $x = \{0,25 ; 1,27\}$

3) <u>Résoudre une inéquation :</u>

Lorsque l'on résout une inéquation graphiquement la méthode sera presque identique, cependant ici la réponse sera un intervalle vérifiant la condition de l'inéquation.

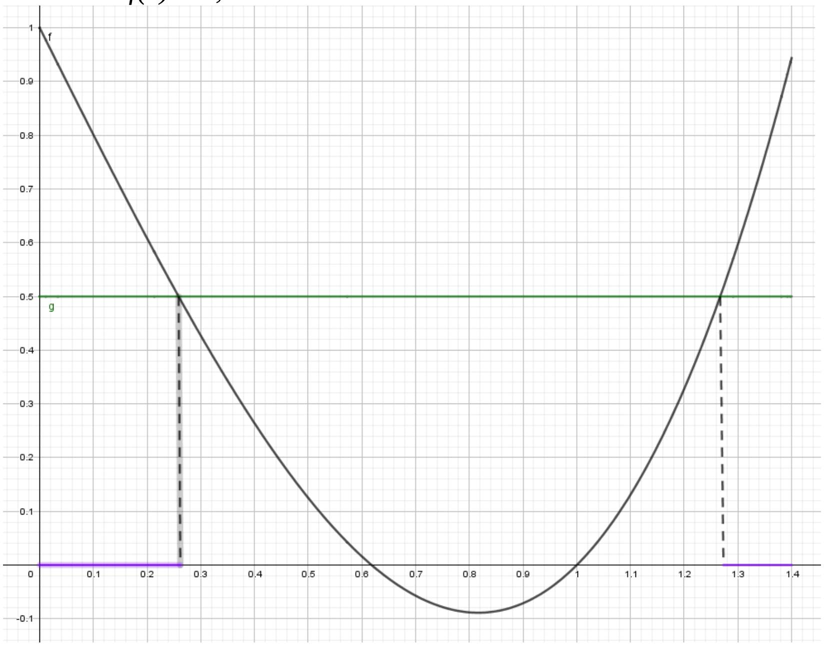
Exemple 1:

Résolvons $f(x) < 0,5$



On procède comme pour lire les antécédents de 0,5. Ensuite on cherche toute la partie de la courbe représentative de f se situant **sous** la droite verte.
La réponse sera l'intervalle vérifiant la condition (ici représenté en rouge). Ainsi nous diront que les solutions de l'inéquation sont :
S =]0,27 ; 1,27[

Exemple 2 :
Résolvons *f(x) > 0,5*

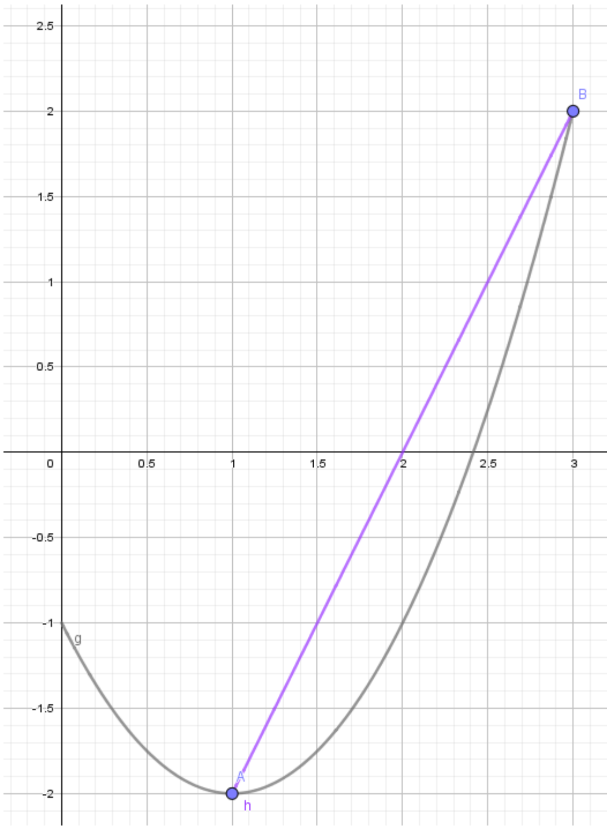


On procède comme pour lire les antécédents de 0,5. Ensuite on cherche toute la partie de la courbe représentative de f se situant **au dessus de** la droite verte.
La réponse sera l'intervalle vérifiant la condition (ici représenté en mauve). Ainsi nous diront que les solutions de l'inéquation sont :
S =]0 ; 0,27[U]1,27 ; 1,4[

IV/ Définition et calcul du taux de variation.

1) Utilisation du taux de variation et définition géométrique.

Le taux de variation est un indicateur utilisé pour résumer une fonction sur un intervalle donnée par un seul et unique chiffre.



Pour obtenir le taux de variation de la fonction f (dont la courbe représentative est en noir) sur l'intervalle [1 ; 3]. On va simplement tracer la droite reliant le point de coordonnées (1 ; f(1)) au point de coordonnées (3 ; f(3)). On calculera ensuite le coefficient directeur de cette droite.

Cet indicateur permet par exemple de déterminer une vitesse moyenne, ou une accélération. Si la courbe ci-contre représente le chiffre d'affaire d'une société sur plusieurs années, on pourrait en déduire son chiffre d'affaire moyen annuel.

2) Définition et calcul du taux de variation.

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. a et b deux réels distincts $\in$ I tels que a < b. Le taux de variation de f sur [a ; b] se calcule de la manière suivante :

$$\tau_{(a,b)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On notera que :
- Le taux de variation peut aussi se nommer taux d'évolution ou taux d'accroissement.
- On reconnait la formule de calcul du coefficient directeur d'une droite.

Exemple :
Calculons le taux de variation de la fonction *f* définie par $f(x) = x^2$ sur [1 ; 3]

$$\tau_{(1,3)} = \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{3^2 - 1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

V/ Calculer les variations d'une fonction

1) Rappels de seconde : Variation d'une fonction.

On se souvient qu'une fonction est croissante lorsque sa courbe représentative va vers le haut. Mathématiquement cela se traduit par des images de plus en plus grandes et inversement lorsque la fonction est décroissante. On retiendra donc les définitions suivantes.

Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I. *a* et *b* deux réels distincts $\in$ I tels que $a < b$.
- *f* est strictement croissante si pour tout *a* et *b*, $f(a) < f(b)$
- *f* est strictement décroissante si pour tout *a* et *b*, $f(a) > f(b)$
- *f* est constante si et seulement si il existe un réel *k* tel que $f(x) = k$.

On retiendra que lorsque la fonction est strictement croissante ou décroissante sur un intervalle on dit que cette fonction est monotone.

2) Signe du taux de variation et monotonie d'une fonction.

Nous avons vu précédemment que l'on peut résumer le comportement d'une fonction sur un intervalle [a ; b] à l'aide du taux de variation. Celui-ci est le coefficient directeur de la droite reliant *f(a)* à *f(b)*. Or nous savons que lorsqu'une droite est croissante son coefficient directeur est positif. De même lorsqu'une droite est décroissante, son coefficient directeur est négatif. Donc nous pouvons en déduire les règles suivantes :
Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I. *a* et *b* deux réels distincts $\in$ I tels que $a < b$.
Si pour tout a et b de I, $\tau_{(a,b)} > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
Si pour tout a et b de I, $\tau_{(a,b)} < 0$ alors f est strictement décroissante sur I.
Si pour tout a et b de I, $\tau_{(a,b)} = 0$ alors f est strictement constante sur I.

A partir de ces définitions il est donc possible de :
- Démontrer la monotonie d'une fonction.
- Déterminer les variations d'une fonction.

Exemples :
Soit $f(x) = x^2 + x - 4$ sur]-∞ ; -3]
Démontrons que cette fonction est monotone sur cet intervalle.

$$\tau_{(a,b)} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{b^2+b-4-[a^2+a-4]}{b-a} = \frac{b^2+b-4-a^2-a+4}{b-a} = \frac{b^2+b-a^2-a}{b-a} = \frac{b^2-a^2+b-a}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)+(b-a)\times 1}{b-a} = b+a+1$$

Il faut maintenant étudier le signe de $\tau_{(a,b)}$ sur cet intervalle. Si celui-ci ne change pas la fonction est monotone.
Sur]-∞ ; -3] a et b sont négatifs et tous les deux inférieurs à 1.
Donc b + a + 1 < 0
Nous pouvons en déduire que :
- *f* est monotone sur]-∞ ; -3] car $\tau_{(a,b)}$ ne change pas de signe.
- *f* est décroissante sur]-∞ ; -3] car $\tau_{(a,b)} < 0$.

Soit $g(x) = \frac{1}{x}$ définie sur] -∞ ; 0[
Démontrons que cette fonction est monotone sur cet intervalle. Ici on peut simplifier rapidement le calcul. En effet cherche le signe de $\tau_{(a,b)}$. Cependant le taux est une fraction et on sait que a < b. Donc b – a > 0. Donc pour étudier le signe de la fraction il suffit d'étudier le signe de *g(b) – g(a)*.

$$g(b) - g(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1\times a}{b \times a} - \frac{1 \times b}{a \times b} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{a-b}{ab}$$

Ici a < 0 et b < 0 car l'intervalle étudié est] -∞ ; 0[et on sait que b – a > 0 donc :
- a – b < 0
- ab > 0

Donc $\frac{a-b}{ab} < 0$
D'où $g(b) - g(a) < 0$
On en déduit que g est strictement décroissante sur] -∞ ; 0[.