



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática



# Métodos para Encontrar Raízes Exatas e Aproximadas de Funções Polinomiais até o 4<sup>o</sup> Grau †

por

**Demilson Antonio do Nascimento**

sob orientação do

**Prof. Dr. Carlos Bocker Neto**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2015

João Pessoa - PB

---

† Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

# Métodos para Encontrar Raízes Exatas e Aproximadas de Funções Polinomiais até o 4<sup>o</sup> Grau.

por

**Demilson Antonio do Nascimento**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração:

Aprovada por:



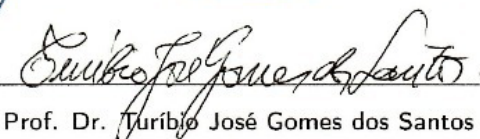
Prof. Dr. Carlos Bocker Neto - UFPB(Orientador)



Prof. Me. Gilmar Otávio Correia - UFPB(Coorientador)



Prof. Dr. João Bosco Batista Lacerda - UFPB



Prof. Dr. Turibio José Gomes dos Santos - UNIPÊ

Fevereiro/2015

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus em primeiro lugar, por me dar a oportunidade de poder realizar mais um sonho em minha vida.

Aos meus pais (em memória) por me apoiarem e me incentivarem aos estudos.

Ao meu amado filho Caio Cesar por todo companheirismo, principalmente nos momentos mais difíceis onde nesses momentos sua força e apoio foram essenciais.

Aos meus irmãos, por suas orações e serem ombros amigos nos momentos difíceis.

Ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Bocker que tanto me ajudou na confecção e correção das ideias utilizadas nesse trabalho.

A todos os Professores do Curso PROFMAT da Universidade Federal da Paraíba em João Pessoa que tanto auxiliaram nossa turma nos diversos momentos de dificuldade e desânimo, contribuindo bastante conosco com sabedoria e paciência.

Aos meus colegas de turma, em especial, Antônio, João Paulo, Edjane, Eli Paulo, José Marcondes, Josildo, Renato Beserra, Marcos Cânciao, Alex e Valter, grandes amigos que fiz no curso e que compartilharam muitas noites e madrugadas de estudos comigo.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo incentivo financeiro dado através da concessão da bolsa de estudos.

# Dedicatória

*A DEUS, ele é a força que movimenta  
meu universo.*

# Resumo

Em diversos problemas de caráter científico, é comum depararmos com a necessidade de obter uma solução aproximada para encontrar raízes de funções. Nesse ponto, este trabalho objetiva realizar um estudo acerca de alguns métodos utilizados para a obtenção de uma solução aproximada das raízes de funções. A pesquisa realizada deu-se por meio de uma revisão bibliográfica, enfocando os Métodos Numéricos da Bisseção, Falsa Posição, Ponto Fixo, Newton-Raphson, Secante e Muller. Com o intuito de ilustrar o funcionamento e aplicação desses métodos, foram realizados testes numéricos de problemas extraídos da literatura por meio da implementação destes. Para cada teste realizado foram analisados os parâmetros que influenciam cada método e a situação de convergência para a solução aproximada dos problemas analisados. Embora esses métodos, nem sempre, disponibilizem raízes exatas, estas poderão ser calculadas com a precisão que o problema necessite. Nesse ponto, fica evidente a importância de estudar métodos para encontrar tais raízes de equações. Diante disso, o trabalho se justifica na necessidade de se discutir os problemas voltados a encontrar raízes de funções polinomiais, existentes na literatura. Além disso, o presente trabalho descreve um comparativo entre os métodos estudados mediante aplicação de problemas matemáticos. Todo esse material de pesquisa torna-se hábil e eficaz para os estudantes e profissionais de todas as áreas que dele faça uso, ou, porventura, pretendam extraí-lo para enriquecimento de fontes diversas de estudo.

**Palavras-chave:** Zeros de Funções Polinomiais e Transcendentes. Métodos Numéricos da Bisseção, Falsa Posição, Ponto Fixo, Newton-Raphson, Secante e Muller

# Abstract

In several scientific character problems, it is common to come across us with the need to obtain an approximate solution to find roots of functions. At this point, this paper aims to conduct a study about some methods used to obtain an approximate solution of the functions of roots. The survey was made by means of a literature review, focusing on Numerical Methods Bisection, False Position, Fixed Point, Newton-Raphson and Secant. In order to illustrate the operation and application of these methods, numerical test problems taken from the literature were performed by implementing these. For each test performed were analyzed parameters that influence each method and the convergence situation for the approximate solution of the analyzed problems. Although these methods do not always make available exact roots, they can be calculated with the precision that the problem needs. At this point, it is evident the importance of studying methods for finding such equations roots. Thus, the work is justified on the need to discuss the problems facing the finding roots of polynomial functions in the literature. In addition, this paper describes a comparison between the methods studied by applying mathematical problems. All this research material becomes adept and effective for students and professionals from all areas that make use of them, or perhaps wish to extract it for enrichment of several sources of study.

**Keywords:** Zeros of Polynomial Functions and Transcendent. Numerical Methods of bisection, False Position, Fixed Point, Newton-Raphson, Secant and Muller.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Polinômios</b>	<b>2</b>
1.1	Polinômio Nulo . . . . .	2
1.2	Igualdade de Polinômios . . . . .	3
1.3	Adição de Polinômios . . . . .	4
1.4	Diferença de Polinômios . . . . .	6
1.5	Produto de Polinômios . . . . .	6
1.6	Grau de um Polinômio . . . . .	7
1.7	Divisão de Polinômios . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Raiz de Função Polinomial</b>	<b>12</b>
2.1	Raízes Múltiplas de Polinômios . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Método para Encontrar Raízes de Função Polinomial</b>	<b>20</b>
3.1	Equação do 1º grau . . . . .	20
3.2	Equação do 2º grau . . . . .	21
3.3	Equação do 3º grau - Método de Cardano . . . . .	25
3.4	Equação do 4º grau - Método de Ferrari . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Métodos Iterativos para Obter Zeros de Funções</b>	<b>36</b>
4.1	Método da Bisseção . . . . .	39
4.1.1	Estudo da Convergência . . . . .	42
4.1.2	Estimativa do Número de Iterações . . . . .	43
4.2	Método da Posição Falsa . . . . .	43
4.3	Método do Ponto Fixo - MPF . . . . .	45
4.3.1	Estudo da Convergência do MPF . . . . .	46
4.4	Método de Newton-Raphson . . . . .	49

---

4.4.1	Motivação Geométrica . . . . .	51
4.4.2	Estudo da Convergência do Método de Newton-Raphson . . . . .	52
4.4.3	Ordem de Convergência . . . . .	52
4.5	Método da Secante . . . . .	53
4.6	Método de Muller . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Sugestões de Alguns Exercícios para Aplicação no Ensino Básico</b>	<b>59</b>
5.1	Exercício de Função Polinomial do 1º grau . . . . .	59
5.2	Exercício de Função Polinomial do 2º grau . . . . .	60
5.3	Exercício de Função Polinomial do 3º grau . . . . .	61
5.4	Exercício de Função Polinomial do 4º grau . . . . .	63
	<b>Apêndice</b>	<b>67</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>69</b>



# Introdução

A prática profissional com estudantes do Ensino Fundamental e Médio tem revelado certa ineficiência na forma tradicional de se estudar as raízes de equações algébricas e transcendentais. Expor o conteúdo de equações apenas pelo método algébrico, dar alguns exemplos e, em seguida, uma bateria de exercícios não tem sido eficaz na construção do conhecimento, nem no desenvolvimento do conceito que, dessa maneira, torna-se extremamente abstrato e com pouco significado para o aluno.

Os estudantes têm os primeiros contatos com as equações algébricas no oitavo ano (antiga sétima série), quando estudam as raízes de equações do 1º grau. Depois, no nono ano (antiga oitava série), estudam as equações de primeiro e de segundo grau, bem como as suas funções associadas. Como no Ensino Fundamental esses alunos tiveram contatos com tais equações algébricas, pressupõe-se que, no Ensino Médio, eles já tenham esses conceitos interiorizados.

Entretanto, percebe-se que a maioria deles não consegue diferenciar uma equação de uma função e não tem conhecimento de métodos mais gerais (numéricos aproximados) para determinar as raízes de uma equação. Um dos problemas detectados entre esses alunos está na falta de compreensão do resultado de uma equação algébrica (ou seja, ao atribuir significado à sua raiz). Para se chegar ao resultado, muitos utilizam técnicas mecanizadas. Por exemplo: ao resolver uma equação do primeiro grau,  $x + 2 = 0$ , dizem: (é só passar o dois para o outro lado com o sinal trocado). Mas se forem perguntados sobre o que significa este  $x = -2$ , eles não sabem dizer e simplesmente afirmam que (é a resposta).

Por estarem mais acostumados com a aritmética, os alunos têm dificuldades em lidar com a álgebra. Como encontrar o valor de  $x$ , torna-se um grande problema para muitos alunos. Sendo assim, é importante que o professor não dê ênfase

---

apenas em um método de resolução, mas permita que o estudante experimente diferentes possibilidades, relacionadas à solução, interpretação e aplicação das equações. Procurando buscar soluções para algumas dificuldades que, em geral, os alunos do Ensino Fundamental e Médio encontram em álgebra, resultando em certos bloqueios no aprendizado da matemática, e que estas dificuldades podem perdurar por muito tempo, chegando até ao Ensino Superior, surgiu o interesse pelo tema da presente pesquisa.

A maioria dos alunos do Ensino Médio tem dificuldades para utilizar as técnicas apropriadas na resolução de equações algébricas e transcendentais porque quase sempre realizaram-nas de forma mecanizada, sem entender o processo, o que se caracteriza pela abordagem de focar o conceito apenas pelo conceito. Fiorentini e Miorim em uma de suas pesquisas afirmaram que a maioria dos professores trabalha a álgebra de maneira mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, mactes, símbolos e expressões, tal como ocorria há várias décadas mostram que o seu ensino não tem recebido devida atenção (FIORENTINI;MIORIM, 1992).

Observou-se em alguns livros didáticos usados, atualmente, no terceiro ano do Ensino Médio, que não é habitual usar métodos numéricos para determinar as raízes de uma equação. Assim, foi feita uma experiência com os alunos/sujeitos desta pesquisa: o uso de um método de aproximação de fáceis manuseio e entendimento conhecido como método da Bisseção. Além de lhes disponibilizar uma ferramenta matemática mais geral para cálculo de raízes, a expectativa é de que, ao tomar contato com a dinâmica desse tipo de método, os estudantes estejam mais preparados para enfrentar os cursos superiores de Engenharia ou áreas afins, em que as ideias de variação e convergência predominam.

Diante dos questionamentos levantados formulou-se a questão principal dessa pesquisa: De que forma as articulações entre tratamentos analíticos, geométricos e numéricos aproximados podem auxiliar o estudo de raízes de equações algébricas no Ensino Médio? A intenção de explorar um estudo iterativo de métodos algébricos, geométricos e numéricos aproximados, para determinar as raízes de equações algébricas numa turma de alunos do Ensino Médio constituiu-se no objetivo geral de investigação deste trabalho, o que pareceu pertinente pela sua importância, tanto

---

na matemática, como em áreas afins. Além disso, alguns alunos do Ensino Médio, que farão curso superior em áreas de exatas, necessitarão desses conceitos.

Foram destacados ainda, três objetivos específicos:

a) trabalhar a diferenciação entre função e equação, visando retomar o significado do valor numérico encontrado como raiz de uma equação;

b) levar o aluno a lidar com equações e suas raízes em situações e problemas, alternando tratamentos (dentro do mesmo registro) e conversões (entre registros diferentes);

c) explorar o ensino dos Métodos Numéricos da Bisseção, Falsa Posição, Ponto Fixo, Newton-Raphson, Secante e Muller, como síntese das representações algébricas, geométricas e numéricas aproximadas e convergentes. A proposta é o desenvolvimento de um tópico do programa de equações algébricas: estudo das raízes de uma equação, através de atividades que desafiam a curiosidade, evitando, assim, que o professor utilize o tempo em sala de aula apenas com atividades de natureza tradicional. Um aspecto a ser observado é a utilização do microcomputador e da calculadora nas aulas de Matemática, pois são instrumentos valiosos, especialmente quando a proposta envolve lidar com método de aproximação numérico associado a interpretações algébricas e geométricas.

Nessa pesquisa, fez-se o uso dessas tecnologias ao desenvolver o conjunto de atividades, cujo objetivo foi o de despertar nos alunos interesse e entendimento de resolução de Equações. As atividades em forma de sequência didática, conforme Zabala (1998), apresentam-se como uma maneira de encadear e articular os diferentes conteúdos ao longo de uma unidade didática, de forma que se possa analisar as tarefas realizadas e as possíveis intervenções a serem empregadas. Dessa forma, buscou-se o desenvolvimento de uma sequência didática de atividades que fosse incorporada à metodologia de estudo, permitindo aproveitar os conhecimentos prévios que cada aluno tem em relação ao conteúdo de aprendizagem. Esta sequência buscou, também, promover uma atitude favorável, motivadora em relação à aprendizagem de novos conteúdos, de forma que estimulasse a autoestima e a construção do conhecimento, ajudando o aluno a adquirir habilidades relacionadas ao aprender a aprender, que lhe permitam ser cada vez mais autônomo em suas aprendizagens.

Será possível vislumbrar nesse trabalho as raízes das funções polinomiais como

---

pontos específicos do domínio que possuem a capacidade de tornar nulas as equações. Tais pontos (raízes) quando conhecidos possibilitam a aplicação em problemas práticos de diversas áreas do conhecimento. Assim, nos dois primeiros capítulos, discorre-se acerca de um visão geral sobre polinômios e funções polinomiais, sendo nos terceiro e quarto trabalhados métodos de resoluções de equações até o 4º grau. Reserva-se ao 5º, sendo este o último, alguns exercícios resolvidos pelos métodos vistos nos 3º e 4º capítulos.

# Capítulo 1

## Polinômios

**Definição 1.1** Um polinômio sobre  $\mathbb{C}$  é uma expressão algébrica da forma  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , onde  $a_j \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e  $x$  é uma variável complexa. Os números  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  são denominados **coeficientes** e as parcelas  $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$  são chamados **termos** do polinômio  $p$ .

A função  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  é denominada **função polinomial**.

Por convenção no que segue, vamos nos referir a função polinomial  $p(x)$  simplesmente como polinômio.

**Exemplo 1.1** Dado  $p(x) = 12 - 10x - 4x^2 + 2x^3$ , temos os coeficientes  $a_0 = 12$ ,  $a_1 = -10$ ,  $a_2 = -4$ ,  $a_3 = 2$ .

**Definição 1.2** Dado o número  $\alpha$  e o polinômio  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , chama-se valor numérico de  $p$  em  $\alpha$  a imagem de  $\alpha$  pela função  $p$ , isto é:

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n.$$

**Exemplo 1.2** Se  $p(\alpha) = 12 - 10\alpha - 4\alpha^2 + 2\alpha^3$ , para  $\alpha = 2$ , temos:

$$p(2) = 12 - 10 \cdot 2 - 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 = -8.$$

### 1.1 Polinômio Nulo

**Definição 1.3** Dizemos que um polinômio  $p$  é **nulo** quando  $p$  assume o valor numérico zero para qualquer  $x \in \mathbb{C}$ .

**Teorema 1.1** *Um polinômio  $p$  é nulo se, e somente se, todos os seus coeficientes forem nulos. Isto é, se  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , então  $p(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{C}$  se, e somente se,  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .*

**Prova.** É imediato que  $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$  implica que  $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^n = 0$ , para todo  $x \in \mathbb{C}$ . Por outro lado, se  $p$  é nulo, então existem  $n + 1$  números complexos  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , distintos dois a dois, que são raízes de  $p$ , ou seja:

$$\begin{aligned} p(\alpha_0) &= a_0 + a_1\alpha_0 + a_2\alpha_0^2 + \dots + a_n\alpha_0^n \\ p(\alpha_1) &= a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \dots + a_n\alpha_1^n \\ p(\alpha_2) &= a_0 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + \dots + a_n\alpha_2^n \\ &\dots = \dots \\ f(\alpha_n) &= a_0 + a_1\alpha_n + a_2\alpha_n^2 + \dots + a_n\alpha_n^n. \end{aligned}$$

Assim, temos um sistema linear homogêneo do tipo  $(n + 1) \times (n + 1)$  cujas incógnitas são  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Como o determinante deste sistema é dado por:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$$

tratando-se de uma matriz de Vandermonde (ver apêndice A), e cujos elementos característicos são  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  todos distintos, o sistema tem uma única solução que é a trivial:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

■

## 1.2 Igualdade de Polinômios

**Proposição 1.1** *Dizemos que dois polinômios  $p$  e  $g$  são **iguais** se, e somente se, os coeficientes de  $p$  e  $g$  forem ordenadamente iguais, ou seja*

se

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_ix^i$$

temos:

$$p = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

**Prova.** Para todo  $x \in \mathbb{C}$ , temos:

$$\begin{aligned} a_i = b_i &\Leftrightarrow a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow (a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n (a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_ix^i - \\ \sum_{i=0}^n b_ix^i &= 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n a_ix^i = \sum_{i=0}^n b_ix^i \Leftrightarrow f(x) = g(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Exemplo 1.3** Dado  $p(x) = a + 3x - cx^2 + (c + 1)x^3$  e  $g(x) = 2 + (a + b)x - (a + b + 1)x^2 + dx^3$ , determine os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  de modo que os polinômios  $p$  e  $g$  sejam iguais.

Temos:

$$a = 2$$

$$3 = a + b \Rightarrow 3 = 2 + b \Rightarrow b = 1$$

$$c = a + b + 1 \Rightarrow c = 2 + 1 + 1 \Rightarrow c = 4$$

$$c + 1 = d \Rightarrow 4 + 1 = d \Rightarrow d = 5.$$

## 1.3 Adição de Polinômios

**Definição 1.4** Dados dois polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_ix^i$$

chama-se **soma** de  $p$  com  $g$  o polinômio

$$(p + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

isto é:

$$(p + g)(x) = p(x) + g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i.$$

**Exemplo 1.4** Somar  $p(x) = 12 - 10x - 4x^2 + 2x^3$  e  $g(x) = 8 - 5x + 2x^4$ .

Temos:

$$\begin{aligned}(p + g)(x) &= (12 + 8) + (-10 - 5)x - 4x^2 + 2x^3 + 2x^4 \\ &= 20 - 15x - 4x^2 + 2x^3 + 2x^4 \\ &= 20 - 15x - 2x^2 + 2x^3.\end{aligned}$$

**Teorema 1.2** A operação de adição define em  $P$  (conjunto dos polinômios de coeficientes complexos) uma estrutura de grupo, isto é:

[A-1] Associativa

[A-2] Comutativa

[A-3] existência de elemento neutro

[A-4] existência de inverso aditivo

**Prova.** Sendo  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ,  $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ ,  $h(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$  e  $j(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i = 0$ , com  $f, g, h$  e  $j \in P$ .

[A-1]  $f + (g + h) = (f + g) + h$ .

Fazendo  $f + (g + h) = \sum_{i=0}^n d_i x^i$  e  $(f + g) + h = \sum_{i=0}^n e_i x^i$ ,  
temos:  $d_i = a_i + (b_i + c_i) = (a_i + b_i) + c_i = e_i$ ,  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

[A-2]  $f + g = g + f$ .

Fazendo  $(f + g)(x) = \sum_{i=0}^n \beta_i x^i$  e  $(g + f)(x) = \sum_{i=0}^n \delta_i x^i$ ,  
temos:  $\beta_i = a_i + b_i = b_i + a_i = \delta_i$ ,  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

[A-3]  $f + j = f$ .

Fazendo  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  e  $j(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ ,  
temos:  $f + j = f \Leftrightarrow a_i + \alpha_i = a_i$ ,  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Então  $\alpha_i = 0$ ,  $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , portanto  $j$  é o polinômio nulo.

[A-4]  $f + l = j$ , com  $l \in P$ .

Fazendo  $l(x) = \sum_{i=0}^n r_i x^i$ ,  
temos:  $f + l = j \Leftrightarrow a_i + r_i = 0$ .

Então  $r_i = -a_i$ , portanto  $l(x) = \sum_{i=0}^n (-a_i) x^i = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_n x^n$  é

o inverso aditivo de  $f(x)$ . ■



## 1.4 Diferença de Polinômios

**Definição 1.5** Tendo em vista o teorema anterior e dados dois polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

definimos **diferença** entre  $p$  e  $g$  o polinômio  $(p - g)(x) = (p + (-g))(x)$ , isto é:

$$(p - g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_n - b_n)x^n = \sum_{i=0}^n (a_i - b_i)x^i.$$

## 1.5 Produto de Polinômios

**Definição 1.6** Dados dois polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

chama-se **produto**  $fg$  o polinômio

$$(fg)(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + a_nb_nx^{m+n}.$$

Notemos que o produto  $fg$  é um polinômio  $(fg)(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k$  onde  $c_k = a_nb_n$ , com  $k = m + n$ , logo:

$$(fg)(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i.$$

**Exemplo 1.5** Multiplicar  $p(x) = 12 - 10x + 2x^3$  por  $g(x) = 8 - 2x^2$ .

Temos:

$$\begin{aligned}(pg)(x) &= 96 - 80x + 16x^3 - 24x^2 + 20x^3 - 4x^5 \\ &= 96 - 80x - 24x^2 + (16 + 20)x^3 - 4x^5 \\ &= 96 - 80x - 24x^2 + 36x^3 - 4x^5.\end{aligned}$$

## 1.6 Grau de um Polinômio

**Definição 1.7** Seja  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$  um polinômio não nulo sobre  $\mathbb{C}$ . Chama-se grau de  $p$ , e representa-se por  $\partial p$  ou  $\text{grp}$ , o número natural  $q \leq n$  tal que  $a_q \neq 0$  e  $a_i = 0$  para todo  $i > q$ .

$$\partial p = q \Leftrightarrow \begin{cases} a_q \neq 0 \\ a_i = 0, \forall i > q \end{cases}$$

**Teorema 1.3** Se  $p, g$  e  $p + g$  são polinômios não nulos, então o grau de  $p + g$  é menor ou igual ao maior dos números  $\partial p$  e  $\partial g$ , ou seja  $\partial(p + g) \leq \max\{\partial p, \partial g\}$ .

**Prova.** Sendo  $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$ ,  $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ ,  $\partial p = m$  e  $\partial g = n$ .

(i) Se  $m \neq n$ , assumamos então que  $m > n$ . Assim, temos:

$$(p + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots + b_m x^m$$

onde  $\partial(p + g) = m = \max\{\partial p, \partial g\}$ ;

(ii) Se  $m = n$ , mas  $p + g \neq 0$ , então

$$(p + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n.$$

Logo, temos duas possibilidades:

(1)  $a_n + b_n = 0$ , daí  $\partial(p + g) < n = \max\{\partial p, \partial g\}$ ;

(2)  $a_n + b_n \neq 0$ , daí  $\partial(p + g) = n = \max\{\partial p, \partial g\}$ .

Em ambos os casos temos:  $\partial(p + g) \leq \max\{\partial p, \partial g\}$ . ■

**Exemplo 1.6** Dados os polinômios  $p(x) = 2 + 3x + 2x^3$  e  $g(x) = 3x + 4x^2$ , com  $\partial p = 3$  e  $\partial g = 2$ . Faça  $(p + g)(x)$  e verifique seu grau.

Temos:

$$(p + g)(x) = 2 + 6x + 4x^2 + 2x^3 \Rightarrow \partial(p + g) = 3$$

**Exemplo 1.7** Dados os polinômios  $p(x) = 2 + 3x + 2x^3$  e  $g(x) = 3x + 4x^2 - 2x^3$ , com  $\partial p = 3$  e  $\partial g = 3$ . Faça  $(p + g)(x)$  e verifique seu grau.

Temos:

$$(p + g)(x) = 2 + 6x + 4x^2 \Rightarrow \partial(p + g) = 2$$

**Proposição 1.2** Se  $p$  e  $g$  são dois polinômios não nulos sobre  $\mathbb{C}$ , então o grau de  $pg$  é igual à soma dos graus de  $p$  e  $g$ , logo  $\partial(pg) = \partial p + \partial g$

**Prova.** Suponha que  $p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$  e  $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$ ,  $\partial p = m$  e  $\partial g = n$ , então  $a_m \neq 0$  e  $b_n \neq 0$ .

Pela definição de produto de polinômios  $(pg)(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i$ , onde  $c_k$  é a soma de todos os números da forma  $a_i b_j$  com  $m+n = k$ .

Em particular,  $c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$ , pois  $a_m \neq 0$  e  $b_n \neq 0$ . Logo  $\partial(fg) = m+n$  ■

**Exemplo 1.8** Dados os polinômios  $p(x) = 12 - 10x - 4x^2 + 2x^3$  e  $g(x) = 8 - 2x^2$ , com  $\partial p = 3$  e  $\partial g = 2$ , Faça  $(pg)(x)$  e verifique seu grau.

Temos:

$$(pg)(x) = 96 - 80x - 56x^2 + 36x^3 + 8x^4 - 4x^5, \text{ onde } \partial(pg) = \partial p + \partial g = 3 + 2 = 5.$$

## 1.7 Divisão de Polinômios

**Definição 1.8** Dados dois polinômios  $p$  e  $g$ , com  $g \neq 0$ , dividir  $p$  por  $g$  é determinar dois outros polinômios  $q$  e  $r$  de modo que se verifiquem as duas condições seguintes:

$$\begin{cases} qg + r = p \\ \partial r < \partial g \end{cases}$$

Quando  $r = 0$  a divisão é chamada de exata.

Se  $q \neq 0$ , então  $\partial(qg) = \partial q + \partial g > \partial g$ , portanto  $\partial(qg + r) \geq \partial g$ .

Examinaremos o polinômio  $qg + r$ , onde  $g \neq 0$  com  $\partial r < \partial g$ .

(i) Se  $q = 0$  e  $r = 0$ , então  $p = qg + r = 0$ ;

(ii) Se  $q = 0$  e  $r \neq 0$ , então  $p = qg + r = 0 \cdot g + r = r$ , portanto,  $\partial(qg + r) = \partial r < \partial g$ .

Existem dois casos em que a divisão é imediata.

1º)  $p = 0$ , temos:  $qg + r = 0 \Leftrightarrow q(x) = 0$  e  $r(x) = 0$ .

2º)  $\partial p < \partial g$ , temos:  $qg + r = p \Rightarrow \partial(qg + r) = \partial p \Rightarrow \partial(qg + r) < \partial g$ , isto ocorre se, e somente se  $q = 0$  e  $r \neq 0$  e daí se  $\partial p < \partial g$  então  $q = 0$  e  $r = p$ .

**Teorema 1.4** Dados os polinômios  $p = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ( $a_m \neq 0$ ) e  $g = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$  ( $b_n \neq 0$ ) existe um único polinômio  $q$  e  $r$  tais que  $qg + r = p$  e  $\partial r < \partial g$  (ou  $r = 0$ ).

**Prova. Existência**

Vamos formar o monômio  $\frac{a_m}{b_n}x^{m-n} = q_0x^{m-n}$  e construir o polinômio

$$r_1 = p - (q_0x^{m-n})g \quad (1)$$

chamado 1º resto parcial.

Notemos que:

$r_1 = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots - \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}(b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots)$  o que prova o cancelamento de  $a_mx^m$  (pelo menos), portanto  $\partial r_1 = \alpha < m$ .

Façamos  $r_1 = c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \dots + c_1x + c_0$ .

Formemos agora o monômio  $\frac{c_\alpha}{b_n}x^{\alpha-n} = q_1x^{\alpha-n}$  e construiremos o polinômio

$$r_2 = r_1 - (q_1x^{\alpha-n})g \quad (2)$$

chamado 2º resto parcial.

Notemos que:

$r_2 = (c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + \dots) - \frac{c_\alpha}{b_n}x^{\alpha-n}(b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots)$  o que prova o cancelamento de  $c_\alpha x^\alpha$  (pelo menos), portanto,  $\partial r_2 = \beta < \alpha$ .

Façamos  $r_2 = d_\beta x^\beta + d_{\beta-1}x^{\beta-1} + \dots + d_1x + d_0$ .

Vamos formar o monômio  $\frac{d_\beta}{b_n}x^{\beta-n} = q_2x^{\beta-n}$  e construir o polinômio

$$r_3 = r_2 - (q_2x^{\beta-n})g \quad (3)$$

chamado de 3º resto parcial.

Notemos que:

$r_3 = (d_\beta x^\beta + d_{\beta-1}x^{\beta-1} + \dots) - \frac{d_\beta}{b_n}x^{\beta-n}(b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots)$  o que prova o cancelamento de  $d_\beta x^\beta$  (pelo menos), portanto,  $\partial r_3 = \gamma < \beta$ .

Para maior comodidade, façamos  $r_3 = e_\gamma x^\gamma + e_{\gamma-1}x^{\gamma-1} + \dots + e_1x + e_0$

Note que, em cada grupo de operações, o grau do resto parcial diminui de ao menos uma unidade, concluimos que, após um certo número  $p$  de operações resulta um resto parcial  $r_k$  de grau inferior ao de  $g$  (ou então  $r_k = 0$ ) e  $r_k = r_{k-1} - (q_{k-1}x^{\varepsilon-k})g$ , chamado de  $k$  resto parcial.

Adicionando membro a membro as igualdades de (1) a (k)

$$\begin{cases} r_1 = p - (q_0 x^{m-n})g \\ r_2 = r_1 - (q_1 x^{\alpha-m})g \\ r_3 = r_2 - (q_2 x^{\beta-m})g \\ \dots\dots\dots \\ r_k = r_{k-1} - (q_{k-1} x^{\varepsilon-k})g \end{cases}$$

Obtemos:  $r_k = k - (q_0 x^{m-n} + q_1 x^{\alpha-m} + \dots + q_{k-1} x^{\varepsilon-k})g$ , então  $p = qg + r$  com  $\partial r < \partial g$  ou  $r = 0$ .

**Unicidade**

Admitamos a existência de dois quocientes  $q_1$  e  $q_2$  e dois restos  $r_1$  e  $r_2$  na divisão de  $p$  por  $g$ , isto é:

$$\begin{cases} q_1 g + r_1 = p \\ q_2 g + r_2 = p \end{cases}$$

Então  $q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2 \Rightarrow (q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$

Se  $q_1 \neq q_2$  ou  $r_1 \neq r_2$  provemos que a igualdade não se verifica:

$$\partial[(q_1 - q_2)g] = \partial(q_1 - q_2) + \partial g \geq \partial g$$

$$\partial(r_2 - r_1) \leq \max\{\partial r_2, \partial r_1\} < \partial g$$

Então, para evitar a contradição, devemos ter  $q_1 = q_2$  e  $r_1 = r_2$ . ■

**Exemplo 1.9** Quando dividimos  $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$  por  $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ , obtemos:  $q(x) = x$  e  $r(x) = -4x^2 + 8x + 2$ , que satisfaz as duas condições:

$$\begin{aligned} qg + r &= x(3x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + (-4x^2 + 8x + 2) \\ &= 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x - 4x^2 + 8x + 2 \\ &= 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2 = p \end{aligned}$$

$$\partial r = 2 \text{ e } \partial g = 3 \Rightarrow \partial r < \partial g.$$

**Exemplo 1.10** Quando dividimos  $p(x) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$  por  $g(x) = x - 2$ , obtemos:  $q(x) = 5x^2 + 11x + 12$  e  $r(x) = 0$ , que satisfaz as duas condições:

$$\begin{aligned} qg + r &= (5x^2 + 11x + 12)(x - 2) + 0 \\ &= 5x^3 + x^2 - 10x - 24 + 0 \\ &= 5x^3 + x^2 - 10x - 24 = p \end{aligned}$$

$r(x) = 0$  (divisão exata, então dizemos que  $p$  é divisível por  $g$  ou  $g$  divide  $p$ ).

## 1.7. DIVISÃO DE POLINÔMIOS

---

**Exemplo 1.11** Quando dividimos  $p(x) = 0$  por  $g(x) = x - 1$ , obtemos:  $q(x) = 0$  e  $r(x) = 0$ , temos:  $qg + r = 0(x - 1) + 0 = 0 = p(x)$ .

**Exemplo 1.12** Quando dividimos  $p(x) = x - 1$  por  $g(x) = x^2 + 3$ , obtemos:  $q(x) = 0$  e  $r(x) = x - 1$ , temos:  $qg + r = 0(x^2 + 3) + (x - 1) = x - 1 = p$ .

## Capítulo 2

### Raiz de Função Polinomial

**Definição 2.1** *Seja  $p$  um polinômio sobre  $\mathbb{C}$ , com função polinomial associada  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Um elemento  $\alpha \in \mathbb{C}$  é uma raiz de  $p$  se  $p(\alpha) = 0$ .*

**Exemplo 2.1** *Se  $p(x) = x + 3$ , é fácil ver que  $x = -3$  é a única raiz de  $p$  em  $\mathbb{C}$ .*

*De fato:*

$$p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto x + 3$$

$$p(x) = 0, \text{ se, e só se } x = -3.$$

**Proposição 2.1** *Se  $p$  um polinômio não nulo sobre  $\mathbb{C}$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$ , então:*

(a)  $\alpha$  é raiz de  $p$  se e só se  $(x - \alpha) \mid p(x)$  em  $\mathbb{C}$ ;

(b) Se  $\alpha$  é raiz de  $p$ , então existe um maior inteiro positivo  $m$  tal que  $(x - \alpha)^m$  divide  $p$  e, neste caso,  $p(x) = (x - \alpha)^m q(x)$  com  $q(\alpha) \neq 0$ ;

(c) Se  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  são raízes duas a duas distintas de  $p$ , então o polinômio  $(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)$  divide  $p(x)$  em  $\mathbb{C}$ .

**Prova.**

(a) Do algoritmo da divisão existem polinômios  $q$  e  $r$  tais que

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x)$$

Com  $r = 0$  ou  $0 \leq \partial r < \partial(x - \alpha) = 1$ . Portanto,  $r(x) = c$ , um polinômio constante.

Logo,  $p(x) = (x - \alpha)q(x) + c$ . Assim,  $\alpha$  é raiz de

$$p \Leftrightarrow 0 = p(x) = (x - \alpha)q(x) + c = c \Leftrightarrow p(x) = (x - \alpha)q(x).$$

---

(b) Se  $m > \partial p$ , então  $(x - \alpha)^m$  não divide  $p(x)$ , uma vez que

$$\partial(x - \alpha)^m = m > \partial p.$$

Portanto existe um maior inteiro positivo  $m$  tal que  $(x - \alpha)^m \mid p(x)$ , daí

$$p(x) = (x - \alpha)^m q(x)$$

de (a) temos:  $q(x) = (x - \alpha)q_1(x)$ , seja  $q_1$  um polinômio sobre  $\mathbb{C}$ .

Mas assim teríamos

$$p(x) = (x - \alpha)^{m+1}q_1(x)$$

o que contraria a minimalidade de  $m$ .

(c) Vejamos o caso  $k = 2$ . Sendo  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  e ambas raízes de  $p$ , por (a) existe um polinômio  $g$  sobre  $\mathbb{C}$  tal que

$$p(x) = (x - \alpha_1)g(x) \quad (1)$$

Se  $p(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)g(\alpha_2) = 0$  então  $\alpha_2$  é raiz de  $g$ . Por (a) existe um polinômio  $h$  sobre  $\mathbb{C}$  tal que

$$g(x) = (x - \alpha_2)h(x) \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)h(x).$$

O caso geral pode ser provado por indução. ■

**Exemplo 2.2** Sendo  $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ , com raízes  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$  e  $x_3 = 2$ .

Temos:

$$p(x) = (x+1)\underbrace{(x^2 - 3x + 2)}_{q_1(x)}, p(x) = (x-1)\underbrace{(x^2 - x - 2)}_{q_2(x)} \text{ e } p(x) = (x-2)\underbrace{(x^2 - 1)}_{q_3(x)}.$$

**Exemplo 2.3** Sendo  $p(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ , com raízes  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 1$ .

Temos:

$$p(x) = (x+1)^2 \underbrace{(x-1)^3}_{q_1(x)} \text{ ou } p(x) = (x-1)^3 \underbrace{(x+1)^2}_{q_2(x)}.$$



**Exemplo 2.4** Sendo  $p(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30$ , com raízes  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 1$  e  $x_4 = 3$ .

Temos:

$$p(x) = (x + 5)(x + 2)(x - 1)(x - 3)h(x), \text{ com } h(x) = 1.$$

**Proposição 2.2** [Algoritmo de Briot-Ruffini] Seja  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  um polinômio sobre  $\mathbb{C}$  com  $a_n \neq 0$ . Se  $\alpha \in \mathbb{C}$  é uma raiz de  $p$  então  $g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{C}$  é o quociente da divisão de  $p(x)$  por  $x - \alpha$ , onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1} \\ \dots\dots\dots \\ b_1 = \alpha b_2 + a_2 \\ b_0 = \alpha b_1 + a_1 \\ r(\alpha) = \alpha b_0 + a_0 \end{array} \right.$$

Sendo  $r(\alpha) = 0$ .

**Prova.** Sendo  $\alpha$  raiz de  $p$ , pela proposição 2.1  $p(x) = (x - \alpha)g(x)$ .

Desenvolvendo o produto acima temos:

$$\begin{aligned} &= (x - \alpha)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0) \\ &= (b_{n-1}x^n + b_{n-2}x^{n-1} + \dots + b_1x^2 + b_0x) - (\alpha b_{n-1}x^{n-1} + \alpha b_{n-2}x^{n-2} + \dots + \alpha b_1x + \alpha b_0) \\ &= b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (b_1 - \alpha b_2)x^2 + (b_0 - \alpha b_1)x - \alpha b_0. \end{aligned}$$

Pela proposição 2.2, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} - \alpha b_{n-1} = a_{n-1} \\ \dots\dots\dots \\ b_1 - \alpha b_2 = a_2 \\ b_0 - \alpha b_1 = a_1 \\ -\alpha b_0 = a_0 \end{array} \right.$$

■

Os cálculos para obter  $q$  indicados acima torna-se mais rápido com a aplicação do seguinte dispositivo prático de Briot-Ruffini.

---

$\alpha$	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
	$\underbrace{a_n}_{b_{n-1}}$	$\underbrace{\alpha b_{n-1} + a_{n-1}}_{b_{n-2}}$	$\underbrace{\alpha b_{n-2} + a_{n-2}}_{b_{n-3}}$	$\dots$	$\underbrace{\alpha b_2 + a_2}_{b_1}$	$\underbrace{\alpha b_1 + a_1}_{b_0}$	$\underbrace{\alpha b_0 + a_0}_{r(x)}$

**Exemplo 2.5** Sendo  $p(x) = 3x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 11x + 10$ , e uma de suas raízes é  $\alpha = 2$ , logo pela preposição 2.1  $(x - 2) \mid p(x)$ . Vejamos:

$\underbrace{\alpha}_{2}$	$\underbrace{a_5}_{3}$	$\underbrace{a_4}_{-6}$	$\underbrace{a_3}_{-4}$	$\underbrace{a_2}_{11}$	$\underbrace{a_1}_{-11}$	$\underbrace{a_0}_{10}$
	$\underbrace{3}_{b_4=a_5}$	$\underbrace{0}_{b_3=\alpha \cdot b_4 + a_4}$	$\underbrace{-4}_{b_2=\alpha \cdot b_3 + a_3}$	$\underbrace{3}_{b_1=\alpha \cdot b_2 + a_2}$	$\underbrace{-5}_{b_0=\alpha \cdot b_1 + a_1}$	$\underbrace{0}_{r(x)=\alpha \cdot b_0 + a_0}$

Então  $q(x) = \frac{p(x)}{(x - 2)} = 3x^4 - 4x^2 + 3x - 5$ .

**Corolário 2.1** Se  $p$  é um polinômio não nulo sobre  $\mathbb{C}$ , então  $p$  possui no máximo  $\partial p$  raízes em  $\mathbb{C}$ .

**Prova.** Por indução sobre o grau de  $p$ . Se  $\partial p = 0$ , então existe  $c \neq 0$  tal que  $p(x) = c$ . Daí, a função polinomial é a função  $x \mapsto c$ , e o número de raízes de  $p$  é o  $0 = \partial p$ .

Seja agora  $p$  um polinômio de grau positivo, e suponha que a afirmação vale para todos os polinômios de graus menores que  $\partial p$ . Se  $p$  não possui raízes em  $\mathbb{C}$  acabou. Senão, seja  $\alpha \in \mathbb{C}$  uma raiz de  $p$  e  $m$  o maior natural tal que  $p(x) = (x - \alpha)^m q(x)$ , para algum polinômio sobre  $\mathbb{C}$ . Como

$$\partial q = \partial p - m < \partial p$$

Pela hipótese de indução  $q$  tem no máximo  $\partial q$  raízes em  $\mathbb{C}$ . Agora, se  $\beta \neq \alpha$  e raízes de  $p$ , então  $0 = p(\beta) = (\beta - \alpha)^m q(\beta)$ , e  $\beta$  também é raiz de  $q$ . Portanto, o número de raízes de  $p$  é igual a  $m$  mais o número de raízes de  $q$ , e segue por hipótese de indução, que  $p$  possui no máximo  $m + \partial q = \partial p$  raízes em  $\mathbb{C}$ . ■

**Corolário 2.2** Se  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}$  admite pelo menos  $n + 1$  raízes distintas em  $\mathbb{C}$ , então  $p$  é identicamente nulo, ou seja,  $a_n = \dots = a_0 = 0$ .

**Prova.** Se  $p$  é um polinômio não nulo sobre  $\mathbb{C}$ , então pelo corolário 2.1,  $p$  teria no máximo  $n$  raízes em  $\mathbb{C}$ . ■

---

**Proposição 2.3** *Sejam  $n > 1$  inteiro;  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  um polinômio de coeficientes inteiros com  $a_n \neq 0$ ,  $r$  e  $s$  inteiros não nulos primos entre si. Se  $p\left(\frac{r}{s}\right) = 0$ , então:*

- (a)  $r \mid a_0$  e  $s \mid a_n$ ;
- (b) Se  $p(X)$  for mônico, então as possíveis raízes de  $p(X)$  são inteiras;
- (c)  $(r - ms) \mid p(m)$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Em particular,  $(r - s) \mid p(1)$  e  $(r + s) \mid p(-1)$ .

**Prova.**

(a) Como  $p\left(\frac{r}{s}\right) = 0$ , temos:  $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \dots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0$  e, daí,

$$\begin{cases} a_0 s^n = r(-a_n r^{n-1} - \dots - a_1 s^{n-1}) \\ a_n r^n = s(-a_{n-1} r^{n-1} - \dots - a_0 s^{n-1}) \end{cases}$$

Portanto,  $r \mid a_0 s^n$  e  $s \mid a_n r^n$ . Porém  $\text{mdc}(r, s) = 1$ , daí  $r \mid a_0$  e  $s \mid a_n$ ;

(b) Sai direto de (a);

(c) Como  $p\left(\frac{r}{s}\right) = 0$ , então  $s^n p(m) = s^n p\left(\frac{r}{s}\right) - p\left(\frac{r}{s}\right)$ , fazamos:

$$\begin{aligned} s^n p(m) &= (a_n (ms)^n + \dots + a_1 m s^n + a_0 s^n) - (a_n r^n + \dots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n) \\ &= a_n ((ms)^n - r^n) + \dots + a_1 s^{n-1} (ms - r) = (ms - r)t, \quad t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Daí  $(ms - r) \mid s^n p(m)$ , como  $\text{mdc}(r, s) = 1 \Rightarrow \text{mdc}(ms - r, s^n) = 1$ , logo  $(ms - r) \mid p(m)$ .

$$\text{Se } \begin{cases} m = 1 \Rightarrow r - s \mid p(1) \\ m = -1 \Rightarrow r + s \mid p(-1) \end{cases}$$

■

**Exemplo 2.6** *Sendo  $p(x) = 8 - 12x - 2x^2 + 3x^3$ , com coeficientes  $a_0 = 8$ ,  $a_1 = -12$ ,  $a_2 = -2$  e  $a_3 = 3$ , e suas raízes  $x_1 = \frac{2}{3}$ ,  $x_2 = -2$  e  $x_3 = 2$ . Considerando  $p\left(\frac{2}{3}\right) = 0$  é fácil ver que  $2 \mid a_0$  e  $3 \mid a_3$ . Para  $p(1) = -3$  e  $p(-1) = 15$  temos:  $(2 - 3) \mid p(1)$  e  $(2 + 3) \mid p(-1)$ .*

**Teorema 2.1** *(Teorema Fundamental da Algebra - TFA(Gauss)) Todo polinômio  $f$  sobre  $\mathbb{C}$  possui ao menos uma raiz complexa.*

**Corolário 2.3** *Se  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  é o polinômio de coeficientes complexos e grau  $n \geq 1$ , então existem  $n$  números complexos  $z_1, \dots, z_n$  tais que  $p(x) = a_n (x - z_1) \dots (x - z_n)$ .*

A demonstração desse teorema pode ser vista no livro Elementos de álgebra (A. Garcia e Y. Lequain, IMPA 2002.)

## 2.1 Raízes Múltiplas de Polinômios

**Definição 2.2** Para um polinômio  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  definimos sua derivada um polinômio  $p'$  sobre  $\mathbb{C}$  como o polinômio

$$p(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-2} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1.$$

Se  $\partial p > 0$ ,  $p' \neq 0$ . Se  $\partial p = 0$ ,  $p' = 0$ .

**Proposição 2.4** Para  $p_1, \dots, p_k$  polinômio sobre  $\mathbb{C}$  e  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ , temos:

$$(a) \left( \sum_{i=1}^k a_i p_i \right)' = \sum_{i=1}^k a_i p_i';$$

$$(b) \left( \prod_{i=1}^k p_i \right)' = \sum_{i=1}^k p_1 \dots p_i' \dots p_k.$$

**Prova.**

(a) Imediato;

(b) Sejam  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  e  $g(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ , de (a)

$$(pg)' = \left[ \left( \sum_{j=0}^n a_j x^j \right) g \right]' = \left( \sum_{j=0}^n a_j x^j g \right)' = \sum_{j=0}^n (a_j x^j g)'$$

porém

$$\begin{aligned} (a_j x^j g)' &= \left( a_j x^j \sum_{i=0}^m b_i x^i \right)' \\ &= \left( \sum_{i=0}^m a_j b_i x^{j+i} \right)' \\ &= \sum_{i=0}^m (a_j b_i x^{j+i})' \\ &= \sum_{i=0}^m (j+i) a_j b_i x^{j+i-1} \\ &= \sum_{i=0}^m j a_j b_i x^{j+i-1} + \sum_{i=0}^m i a_j b_i x^{j+i-1} \\ &= j a_j x^{j-1} \sum_{i=0}^m b_i x^i + a_j x^j \sum_{i=0}^m i b_i x^{i-1} = (a_j x^j)' g + (a_j x^j) g' \end{aligned}$$

daí

$$(pg)' = p'g + pg'$$

A extensão para  $k$  polinômios  $p_1, \dots, p_k$  é imediata por indução. ■

**Exemplo 2.7** Dados os polinômios  $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$  e  $g(x) = 4x^2 + 5x + 10$ , façamos:

$$\begin{aligned}(p + g)'(x) &= (2x^3 + 7x^2 + 5x + 10)' \\ &= 6x^2 + 14x + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p'(x) + g'(x) &= (6x^2 + 6x) + (8x + 5) \\ &= 6x^2 + 14x + 5\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(pg)' &= (8x^5 + 22x^4 + 35x^3 + 14x^2 - 20x - 40)' \\ &= 40x^4 + 88x^3 + 105x^2 + 28x - 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p'g)(x) &= (6x^2 + 6x)(4x^2 + 5x + 10) \\ &= 24x^4 + 54x^3 + 90x^2 + 60x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(pg')(x) &= (2x^3 + 3x^2 - 4)(8x + 5) \\ &= 16x^4 + 34x^3 + 15x^2 - 32x - 20\end{aligned}$$

$$(p'g + pg') = 40x^4 + 88x^3 + 105x^2 + 28x - 20$$

**Corolário 2.4** Se  $p(x) = (x - a)^n$ , então  $p'(x) = n(x - a)^{n-1}$ .

**Prova.** Fazendo  $n = k$  e  $p_1 = \dots = p_n = p$  em (b) da proposição 2.4, temos:  

$$p'(x) = \sum_{j=1}^n p(x)^{n-1} p'(x) = n(x - a)^{n-1}. \quad \blacksquare$$

**Exemplo 2.8** Sendo  $p(x) = (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow p'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$ .

**Proposição 2.5** Seja  $p$  um polinômio não nulo de coeficientes complexos e  $z$  um complexo dado.

(a) Se  $z$  é raiz de multiplicidade  $m \geq 2$  de  $p$ , então  $z$  é raiz de multiplicidade  $m - 1$  de  $p'$ ;

(b) Se  $z$  é raiz de  $p$  e raiz de multiplicidade  $m - 1$  de  $p'$ , então  $z$  é raiz de multiplicidade  $m$  de  $p$ .

**Prova.**

(a)  $p(x) = (x - z)^m g(x)$ , com  $g(z) \neq 0$ . Então  $p'(x) = m(x - z)^{m-1} g(x) + (x - z)^m \cdot g'(x) = (x - z)^{m-1} \cdot [mg(x) + (x - z)g'(x)]$ .

Seja  $h(x) = mg(x) + (x - z)g'(x)$ , temos:  $h(z) = mg(z) \neq 0$  e  $p'(x) = (x - z)^{m-1}h(x)$  daí,  $z$  é raiz de multiplicidade  $m - 1$  de  $p'$ .

(b) Seja  $p(x) = (x - z)^k g(x)$ , com  $g(z) \neq 0$  e  $k \geq 2$ . Por (a), a multiplicidade de  $\alpha$  como raiz de  $p'$  é  $k - 1$ , de modo que  $k - 1 = m - 1$  e, daí,  $k = m$ . ■

**Corolário 2.5** *Se  $z \in \mathbb{C}$  e  $p$  um polinômio não nulo sobre  $\mathbb{C}$ , então  $z$  é raiz múltipla de  $p$  se, e só se,  $p(z) = p'(z) = 0$ .*

**Definição 2.3** *Se  $p$  um polinômio não nulo sobre  $\mathbb{C}$ , definimos a  $k$ -ésima derivada de  $p$ , por:*

$$p^{(k)} = \begin{cases} p, & k = 0 \\ (p^{(k-1)})', & k \geq 1 \end{cases}$$

# Capítulo 3

## Método para Encontrar Raízes de Função Polinomial

Pela definição 2.1, chama-se zeros ou raízes da função polinomial  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  os valores de  $x$  para os quais  $p(x) = 0$ , ou seja  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ . Então, as raízes das funções polinomiais  $p$  é a solução de suas respectivas equações.

### 3.1 Equação do 1º grau

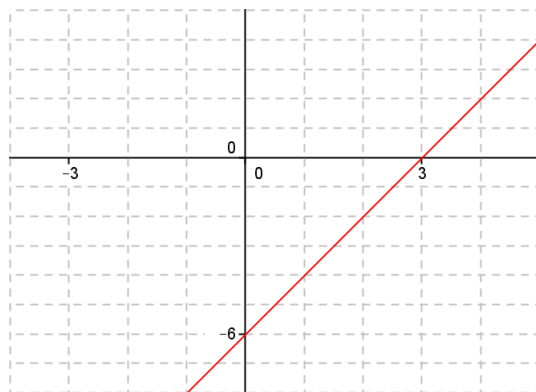
Chama-se equação do 1º grau a equação polinomial  $ax + b = 0$ , com  $a, b \in \mathbb{C}$  e  $a \neq 0$ .

Temos:

A raiz desta equação o valor de  $x$  quando  $x = -\frac{b}{a}$ .

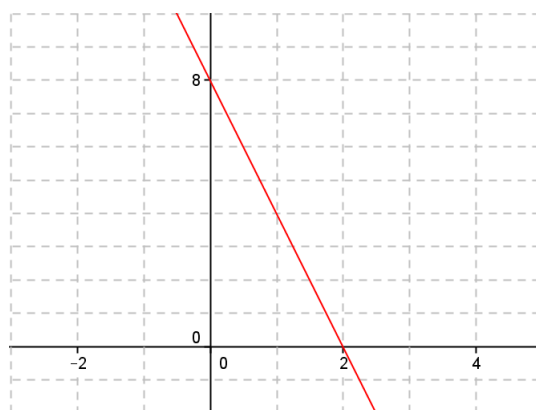
Quando  $\underline{a}$  e  $\underline{b}$  são reais a raiz  $x = -\frac{b}{a}$  também é real.

**Exemplo 3.1** Dado  $p(x) = 2x - 6$  onde os coeficientes são  $a = 2$  e  $b = -6$ , para  $p(x) = 0$  temos:  $2x - 6 = 0$ , logo  $x = -\frac{(-6)}{2} = 3$ , sendo sua raiz  $x = 3$ .



**Figura 3.1**

**Exemplo 3.2** Dado  $p(x) = -4x + 8$  onde os coeficientes são  $a = -4$  e  $b = 8$ , para  $p(x) = 0$  temos:  $-4x + 8 = 0$ , logo  $x = -\frac{8}{(-4)} = \frac{8}{4}$ , com raiz  $x = 2$ .



**Figura 3.2**

## 3.2 Equação do 2º grau

Chama-se equação do 2º grau a equação polinomial  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a, b, c \in \mathbb{C}$  e  $a \neq 0$ .

Um dos métodos mais conhecido e utilizado para solução da equação do 2º grau é a fórmula de Bhaskara.

Bhaskara (1114 - 1185)

Bhaskara nasceu em 1114 na cidade de Vijayapura, na Índia. Também era conhecido como Bhaskaracharya. Ele não deve ser confundido com um outro matemático indiano que tinha o mesmo nome Bhaskara e que viveu no século VII.



Naquela época, na Índia, os ensinamentos eram passados de pai para filho. Havia muitas famílias de excelentes matemáticos. O pai de Bhaskaracharya era astrônomo e, como era de se esperar, ensinou-lhe Matemática e Astronomia.

Bhaskaracharya tornou-se chefe do observatório astronômico de Ujjain - na época, o centro mais importante de Matemática, além de ser uma excelente escola de matemática astronômica criada pelos grandes matemáticos que ali trabalharam.

Bhaskaracharya foi um dos mais importantes matemáticos do século XII, graças aos seus avanços em álgebra, no estudo de equações e na compreensão do sistema numérico - avanços esses que os matemáticos europeus levariam séculos ainda para atingir. Suas coleções mais conhecidas são: *Lilavati* que trata de aritmética; *Bijaganita* que discorre sobre álgebra e contém vários problemas sobre equações lineares e quadráticas com soluções feitas em prosa, progressões aritméticas e geométricas, radicais, ternas pitagóricas entre outros tópicos; *Siddhantasiromani*, dividido em duas partes: uma sobre matemática astronômica e outra sobre a esfera.

Em suas obras podemos perceber que Bhaskara trabalhou com equações de segundo grau e formulou uma expressão que envolvia raízes quadradas. Ele sabia que a equação tem duas raízes, entretanto não parece ser verdade que tivesse encontrado a conhecida fórmula da resolução de equação do 2º grau.

Na realidade, até o fim do século XVI não se utilizava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, simplesmente porque não existia a notação usual de hoje. A representação feita por letras, indicando os coeficientes, começou a ser desenvolvida a partir de François Viète.

O nome de Bhaskara relacionado a esta fórmula aparentemente só ocorre no Brasil. Não encontramos esta referência na literatura internacional. A nomenclatura "fórmula de Bhaskara" não é adequada, pois problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam quase quatro mil anos antes, em textos escritos pelos babilônios, nas tábuas cuneiformes. Nesses textos o que se tinha era uma receita, escrita em prosa, sem uso de símbolos matemáticos, que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos, quase sempre ligados a relações geométricas.

Bhaskara obteve grande reconhecimento pelas suas importantes contribuições para a Matemática. Em 1207, uma instituição educacional foi criada para estudar

### 3.2. EQUAÇÃO DO 2º GRAU

---

o seu trabalho.

Bhaskara morreu aos 71 anos de idade em Ujjain, Índia, em 1185.

O desenvolvimento da "fórmula de Bhaskara" ocorre da seguinte forma:

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c = 0 &\Rightarrow a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0 \Rightarrow \\x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow \\ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 &= \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}} \Rightarrow \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.\end{aligned}$$

O radicando  $b^2 - 4ac = \Delta$  chamado de discriminante e temos a fórmula de Bhaskara na forma

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Quando  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$   $\Delta$  também é real, logo  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

onde  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  e  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  e neste caso temos:

- Se  $\Delta > 0$ , há duas raízes reais e distintas;
- Se  $\Delta = 0$ , há duas raízes reais e iguais;
- Se  $\Delta < 0$ , há duas raízes complexas (não reais).

**Exemplo 3.3** Dado  $p(x) = x^2 + x - 6$  onde os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = 1$  e  $c = -6$ , para  $p(x) = 0$  temos:  $x^2 + x - 6 = 0$ .

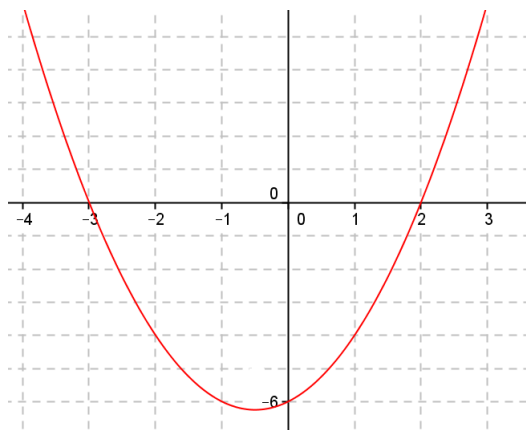
Façamos

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$$

logo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

Sua raízes são  $x_1 = \frac{-1 - 5}{2 \cdot 1} = -3$  e  $x_2 = \frac{-1 + 5}{2 \cdot 1} = 2$ .



**Figura 3.3**

**Exemplo 3.4** Dado  $p(x) = -x^2 + 2x - 1$  onde os coeficientes são  $a = -1$ ,  $b = 2$  e  $c = -1$ , para  $p(x) = 0$  temos:  $-x^2 + 2x - 1 = 0$ .

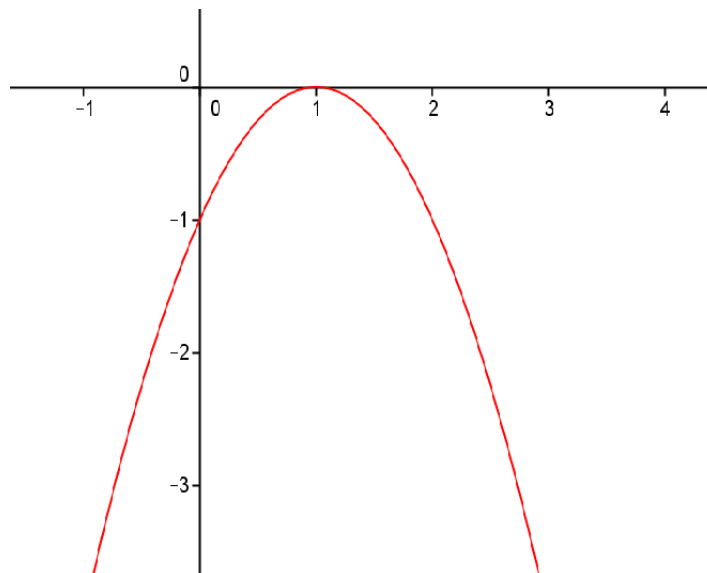
Façamos

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4.(-1).(-1) = 0$$

logo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(+2) \pm \sqrt{0}}{2.(-1)}$$

Suas raízes são  $x_1 = \frac{2-0}{2.1} = 1$  e  $x_2 = \frac{2+0}{2.1} = 1$ .

**Figura 3.4**

**Exemplo 3.5** Dado  $p(x) = x^2 - 2x + 2$  onde os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = -2$  e  $c = 2$ , para  $p(x) = 0$  temos:  $x^2 - 2x + 2 = 0$ .

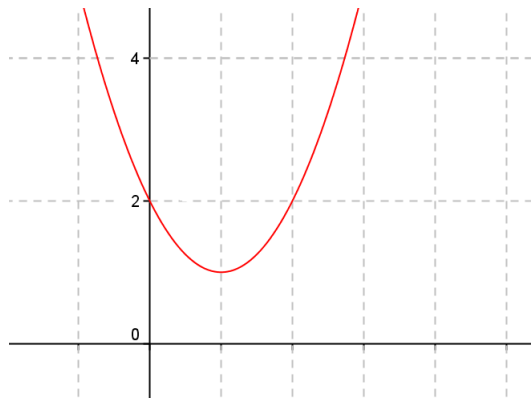
Façamos

$$\Delta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = (-2)^2 - 4.1.2 = -4$$

logo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2.1}$$

Suas raízes são  $x_1 = \frac{2-2i}{2.1} = 1-i$  e  $x_2 = \frac{2+2i}{2.1} = 1+i$ .



*Figura 3.5*

### 3.3 Equação do 3º grau - Método de Cardano

Chama-se equação do 3º grau a equação polinomial  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $a \neq 0$ .

$$p(x) = 0 \Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Um dos métodos conhecido e utilizado para solução da equação do 3º grau, é o método de solução de Cardano para equações cúbicas.

É fascinante toda a história da resolução das equações polinomiais do 3º grau. Em resumo, o descobridor do método foi Scipione del Ferro (1465 - 1562), matemático italiano, que antes de morrer o revelou aos discípulos Antônio Maria Fior e Annibale Della Nave.

Houve uma disputa matemática entre Fior contra Niccolo Fontana (1500 - 1557), conhecido pelo apelido de Tartaglia (gago, em italiano). A vitória deste último, muito divulgada, foi do conhecimento do médico e professor Girolano Cardano (1501 - 1576) que conseguiu lhe atrair para ensinar a regra de resolução sob o juramento de jamais publicá-la. Cardano procurou a demonstração da regra - e achou - e ainda motivou seu discípulo Ludovico Ferrari (1522 - 1565) a descobrir solução para as equações do quarto grau (tema de nossa próxima secção).

Cardano, numa visita a Della Nave, soube do manuscrito de Del Ferro contendo a regra de Tartaglia que já existia há 30 anos. Motivo que o levou quebrar o juramento. Publicou os métodos no seu famoso livro *Ars Magna*, em 1545, onde não deixou

### 3.3. EQUAÇÃO DO 3º GRAU - MÉTODO DE CARDANO

---

de fazer referência aos descobridores, embora a contragosto de Tartaglia que se considerou traído.

Para representar o método requer a forma reduzida da equação cúbica, de tal maneira que não apareça o  $x^2$ .

Sendo  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  e fazendo  $x = y - \frac{b}{3}$ , para isso consideremos  $a = 1$ , segue que

$$\left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = 0.$$

Desenvolvendo os produtos e reagrupando adequadamente, obtemos:

$$y^3 + \underbrace{\left(-\frac{b^2}{3} + c\right)}_p y + \underbrace{\left(\frac{2}{27}b^3 - \frac{bc}{3} + d\right)}_q = 0.$$

Logo a forma reduzida é  $y^3 + py + q = 0$

Solução de Cardano para a equação do tipo  $y^3 + py + q = 0$ .

Seja  $y^3 + py + q = 0$ (\*), e considere  $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ ,

com  $u, v \in \mathbb{C}$ , podemos reescrever como

$$(u + v)^3 - \underbrace{3uv(u + v)}_p + \underbrace{(-u^3 - v^3)}_q = 0$$

comparando com (\*), temos:

$$\begin{cases} p = -3uv \Rightarrow uv = -\frac{p}{3} \Rightarrow u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ -q = u^3 + v^3 \end{cases}$$

Neste caso  $y = u + v$  é solução de (\*). É fácil perceber que  $u^3v^3$  e  $u^3 + v^3$  são respectivamente produtos e soma de raízes de equação do 2º grau, e segue que  $k^2 + qk - \frac{p^3}{27} = 0$ , com  $k \in \mathbb{C}$ , utilizando a fórmula de Bhaskara temos:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \Rightarrow u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \Rightarrow v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Na fórmula acima, tomaremos o radicando  $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = D$  e portanto, uma solução das equação cúbica na forma reduzida é

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}.$$

### 3.3. EQUAÇÃO DO 3º GRAU - MÉTODO DE CARDANO

---

No caso em que os coeficientes do polinômio são reais, temos:  $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$  é um número real, logo existem 3 possibilidades:

- Se  $D > 0$ , há uma raiz real e duas raízes complexa conjugadas;
- Se  $D = 0$ , há 3 raízes reais sendo uma repetida;
- Se  $D < 0$ , há 3 raízes reais distintas.

*Discussão da Equação polinomial do terceiro grau*

**1º caso:**  $D > 0$

**Nota:** Sabemos que se  $z$  é uma das raízes cúbicas complexas do polinômio  $p$  sobre os  $\mathbb{C}$ , então as três raízes cúbicas de  $p$  são  $z; wz; \bar{w}z$ , onde  $w = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  é uma raiz cúbica da unidade.

Na fórmula de Cardano  $u^3$  e  $v^3$  são reais. Denotamos por  $u_1$  e  $v_1$  suas raízes cúbicas reais, os três valores de  $u$  e  $v$  são:

$$u_1; wu_1; \bar{w}u_1; v_1; wv_1; \bar{w}v_1$$

onde  $w$  e  $\bar{w}$  são as raízes cúbicas da unidade. Temos:

$$w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\bar{w} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Para que  $uv$  seja real, as possibilidades para  $u$  e  $v$  são as seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_1 ; v = v_1 \\ u = wu_1 ; v = \bar{w}v_1 \\ u = \bar{w}u_1 ; v = wv_1 \end{array} \right.$$

Portanto as três raízes da equação  $y^3 + py + q = 0$  são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = u_1 + v_1 \\ y_2 = wu_1 + \bar{w}v_1 \\ y_3 = \bar{w}u_1 + wv_1 \end{array} \right.$$

Note que  $\bar{y}_2 = \bar{w}u_1 + wv_1 = y_3$

**Concluimos que:**

Se  $D > 0$  a equação  $y^3 + py + q = 0$  tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

**2º caso:**  $D=0$

Então,  $u_1 = v_1$  e as raízes são:

$$y_1 = u_1 + v_1 = 2u_1$$

$$y_2 = y_3 = (w + \bar{w})u_1 = -u_1$$

Onde  $u_1$  é a raiz cúbica real de  $-\frac{q}{2}$

**Concluimos que:**

Se  $D=0$  a equação  $y^3 + py + q = 0$  possui três raízes reais, sendo uma repetida

**3º caso:**  $D < 0$

Este é um aspecto paradoxal da fórmula de Ferro e Tartaglia. Quando  $D < 0$ , a fórmula exprime  $x = u + v$  como soma de duas raízes cúbicas de números complexos. No entanto é este caso em questão a equação possui três raízes reais e distintas. Este é chamado tradicionalmente o "caso irreduzível" porque, ao tentar eliminar os radicais, recai-se noutra equação do terceiro grau.

Neste caso, usaremos a chamada solução trigonométrica da equação polinomial do terceiro grau, quando  $u^3$  e  $v^3$  nas fórmulas são imaginárias conjugadas.

Façamos:

$$-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-D} = \rho(\cos\theta \pm i\operatorname{sen}\theta)$$

Da igualdade tiramos

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} \\ \cos\theta = -\frac{q}{2\rho} \end{cases}$$

Daí, os três valores de  $u$  e  $v$  são:

$$u = \begin{cases} \frac{1}{\rho^{\frac{1}{3}}} \left( \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right) \right); \\ \frac{1}{\rho^{\frac{1}{3}}} \left( \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) \right); \\ \frac{1}{\rho^{\frac{1}{3}}} \left( \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) \right). \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} \frac{1}{\rho^{\frac{1}{3}}} \left( \cos \left( \frac{\theta}{3} \right) - i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta}{3} \right) \right); \\ \frac{1}{\rho^{\frac{1}{3}}} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{3} \right) - i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 2\pi}{3} \right) \right); \\ \frac{1}{\rho^{\frac{1}{3}}} \left( \cos \left( \frac{\theta + 4\pi}{3} \right) - i \operatorname{sen} \left( \frac{\theta + 4\pi}{3} \right) \right). \end{cases}$$

Como  $uv = -\frac{p}{3}$  é real, temos:

$$\begin{cases} y_1 = 2\rho^{\frac{1}{3}} \cos \left( \frac{\theta}{3} \right) \\ y_2 = 2\rho^{\frac{1}{3}} \cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{3} \right) \\ y_3 = 2\rho^{\frac{1}{3}} \cos \left( \frac{\theta + 4\pi}{3} \right) \end{cases}$$

**Concluimos que:**

Se  $D < 0$  então as três raízes da equação  $y^3 + py + q = 0$  são reais e distintas.

**Exemplo 3.6** Dado o polinômio  $h(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 14$ , onde os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = -3$  e  $d = -14$ , para fazermos a redução de  $h$  eliminando o  $x^2$  consideraremos  $x = y - \frac{b}{3} \Rightarrow x = y - 1$ , logo:

$$h(y - 1) = (y - 1)^3 + 3(y - 1)^2 - 3(y - 1) - 14 = y^3 - 6y - 9 = 0.$$

Utilizando a fórmula de Cardano para equação reduzida  $y^3 + py + q = 0$ , temos:  $p = -6$  e  $q = -9$ .

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = \frac{49}{4}.$$

Como  $D > 0$  a equação  $h(y - 1)$  uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas. façamos:

$$y_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} = 2 + 1 = 3$$

$$y_2 = wu_1 + \bar{w}v_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$y_3 = \bar{w}u_1 + wv_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot 2 + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$$

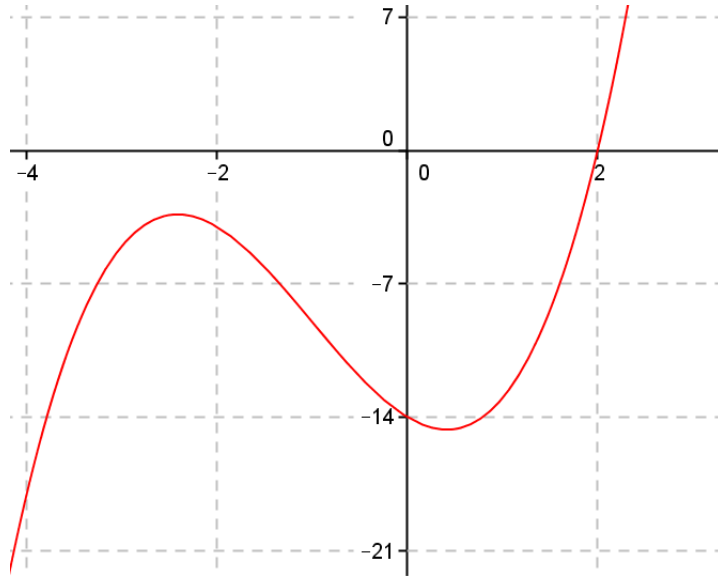


### 3.3. EQUAÇÃO DO 3º GRAU - MÉTODO DE CARDANO

Retornando a equação inicial  $h(x)$ , verificamos as raízes:

$$\begin{aligned}x_1 &= y_1 - 1 = 3 - 1 = 2 \\x_2 &= y_2 - 1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-5 + \sqrt{3}i}{2} \\x_3 &= y_3 - 1 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-5 - \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

Então as raízes de  $h(x)$  são  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{3}i}{2}$  e  $x_3 = \frac{-5 - \sqrt{3}i}{2}$ .



**Figura 3.6**

**Exemplo 3.7** Dado o polinômio  $h(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$ , onde os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = 6$ ,  $c = 9$  e  $d = 4$ , para fazermos a redução de  $h$  eliminando o  $x^2$  consideraremos  $x = y - \frac{b}{3} \Rightarrow x = y - 2$ , logo:

$$h(y - 2) = (y - 2)^3 + 6(y - 2)^2 + 9(y - 2) + 4 = y^3 - 3y + 2 = 0.$$

Utilizando a fórmula de Cardano para equação reduzida  $y^3 + py + q = 0$ , temos:  $p = -3$  e  $q = 2$ .

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3 = 0.$$

Como  $D = 0$  a equação  $h(y - 2)$  tem 3 raízes reais, sendo uma repetida.

façamos:

$$y_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2} - \sqrt{0}} = -2$$

$$y_2 = y_3 = (w + \bar{w})u_1 = -u_1 = -\sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{0}} = 1.$$

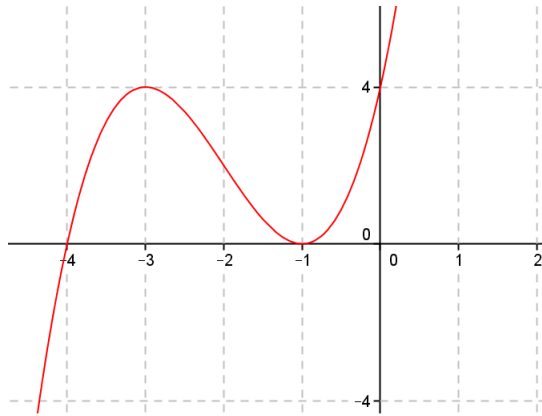
### 3.3. EQUAÇÃO DO 3º GRAU - MÉTODO DE CARDANO

Retornando a equação inicial  $h(x)$ , verificamos as raízes:

$$x_1 = y_1 - 2 = -2 - 1 = -4$$

$$x_2 = x_3 = y_2 - 2 = y_3 - 2 = 1 - 2 = -1.$$

Então as raízes de  $h(x)$  são  $x_1 = -1$  e  $x_2 = -4$ .



**Figura 3.7**

**Exemplo 3.8** Dado o polinômio  $h(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$ , onde os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = -3$  e  $d = -9$ , para fazermos a redução de  $h$  eliminando o  $x^2$  consideraremos  $x = y - \frac{b}{3} \Rightarrow x = y - 1$ , logo

$$h(y - 1) = (y - 1)^3 + 3(y - 1)^2 - 3(y - 1) - 9 = y^3 - 6y - 4 = 0.$$

Utilizando a fórmula de Cardano para equação reduzida  $y^3 + py + q = 0$ , temos:  $p = -6$  e  $q = -4$ .

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = -4.$$

Como  $D = -4$  a equação  $h(y - 1)$  tem 3 raízes reais distintas.

Logo:

$$\rho = \sqrt{\frac{-p^3}{27}} = \sqrt{\frac{-(-6)^3}{27}} = \sqrt{\frac{216}{27}} = \sqrt{8}$$

e

$$\cos\theta = -\frac{q}{2\rho} = -\frac{(-4)}{2\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore \theta = 45^\circ.$$

Façamos:

$$y_1 = 2\sqrt[3]{8} \cos\left(\frac{45^\circ}{3}\right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) = 1 + \sqrt{3}$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{8} \cos\left(\frac{45^\circ}{3} + 120^\circ\right) = 2\sqrt{2} \cos(135^\circ) = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$$

$$y_3 = 2\sqrt{8}\frac{1}{3}\cos\left(\frac{45^\circ}{3} + 240^\circ\right) = 2\sqrt{2}\cos(255^\circ) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right) = 1 - \sqrt{3}.$$

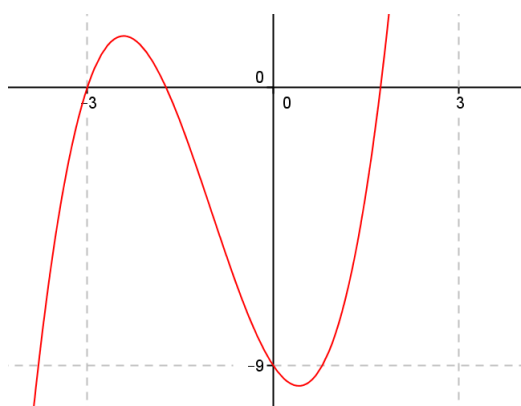
Retornando a equação inicial  $h(x)$ , verificamos as raízes:

$$x_1 = y_1 - 1 = 1 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3}$$

$$x_2 = y_2 - 1 = -2 - 1 = -3$$

$$x_3 = y_3 - 1 = 1 - \sqrt{3} - 1 = -\sqrt{3}$$

Então as raízes de  $h(x)$  são  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -\sqrt{3}$  e  $x_3 = \sqrt{3}$ .



**Figura 3.8**

### 3.4 Equação do 4º grau - Método de Ferrari

Chama-se equação do 4º grau a equação polinomial  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ , onde  $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$ , com  $a \neq 0$ .

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Um dos métodos conhecido e utilizado para solução da equação do 4º grau, é o método de resolução Ferrari para equações quárticas.

As equações do terceiro e quarto grau têm suas histórias de soluções algébricas bastante parecidas e que acontecem no mesmo momento, isto é, na Itália do século XVI. A solução algébrica da equação do 4º grau se deu graças ao matemático, Ludovico Ferrari.

Ferrari foi morar na casa do também matemático Girolamo Cardano, se tornou seu aluno. Como naquela época era comum os matemáticos proporem desafios uns

aos outros através de resolução de questões, certo dia o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi propôs a Cardano que resolvesse o seguinte problema: dividir 10 em 3 partes tal que elas estejam em proporção continuada e que o produto das duas primeiras sejam 6.

Após várias tentativas sem obter êxito, Cardano desafiou seu aluno Ferrari a resolvê-lo. Muito inteligente que era acabou encontrando sua solução. Se as três partes são denotadas por  $x, y$  e  $z$ , tem-se que:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ xz = y^2 \quad (x : y = y : z) \\ xy = 6 \end{cases}$$

Daí, resolver tal problema consistia basicamente em obter as soluções da equação  $x^4 + 6x^2 + 60x + 36 = 0$ . Portanto, foi dessa forma que Ferrari obteve uma fórmula geral para as soluções das equações do quarto grau. Contudo Ferrari não foi reconhecido pela resolução. O mérito foi dado somente a Cardano, pois foi que, com toda sua esperteza, assim como fez com as soluções da equação do 3º grau, acabou publicando também em seu nome as da equação do 4º grau. Desse modo, esses resultados vieram a público, em 1545, na obra de Cardano, *Ars Magna*.

Tal método requer, também, a forma reduzida para a equação quártica, de tal maneira que não apareça o  $x^3$ .

Sendo  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  e fazendo  $x = y - \frac{b}{4}$ , para isso consideremos  $a = 1$ , segue que

$$\left(y - \frac{b}{4}\right)^4 + b\left(y - \frac{b}{4}\right)^3 + c\left(y - \frac{b}{4}\right)^2 + d\left(y - \frac{b}{4}\right) + e = 0$$

Desenvolvendo os produtos e reagrupando adequadamente, obtemos:

$$y^4 + \underbrace{\left(\frac{-3b^2 + 8c}{8}\right)}_p y^2 + \underbrace{\left(\frac{b^3 - 4bc + 8d}{8}\right)}_q y + \underbrace{\left(\frac{-3b^4 + 16b^2c - 64bd + 256e}{256}\right)}_r = 0$$

Logo a forma reduzida é  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ , com  $p, q, r \in \mathbb{C}$ .

A ideia de Ferrari foi a de reagrupar adequadamente os termos em ambos os lados da quártica reduzida, de modo a obter trinômios quadrados perfeitos em cada um dos lados.

De  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$  segue que  $y^4 + py^2 + r = -qy$ .

### 3.4. EQUAÇÃO DO 4º GRAU - MÉTODO DE FERRARI

---

Somando  $\alpha y^2 + \beta$  a ambos os membros, encontramos:

$$y^4 + (\alpha + p)y^2 + (r + \beta) = \alpha y^2 - qy + \beta$$

A fim de que esses trinômios sejam quadrados perfeitos, é necessário e suficiente que os respectivos discriminantes sejam iguais a zero, ou seja:

$$\begin{cases} (p + \alpha)^2 - 4(r + \beta) = 0 & (i) \\ q^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{q^2}{4\alpha} & (ii) \end{cases}$$

Substituindo (ii) na equação (i) concluímos que

$$p^2 + 2p\alpha + \alpha^2 - 4r - \frac{q^2}{\alpha} = 0.$$

daí

$$\alpha^3 + 2p\alpha^2 + (p^2 - 4r)\alpha - q^2 = 0.$$

Esta última equação é uma cúbica na incógnita  $\alpha$ . Como já sabemos resolver as cúbicas, podemos encontrar suas raízes.

**Exemplo 3.9** Dado o polinômio  $h(x) = x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 38x - 40$ , onde os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = 8$ ,  $c = 9$ ,  $d = -38$  e  $e = -40$ , para fazermos a redução de  $h$  eliminando o  $x^3$  consideraremos  $x = y - \frac{b}{4} \Rightarrow x = y - 2$ , logo  $h(y-2) = (y-2)^4 + 8(y-2)^3 + 9(y-2)^2 - 38(y-2) - 40 = y^4 - 15y^2 - 10y + 24 = 0$ . De  $y^4 - 15y^2 - 10y + 24 = 0$  segue que  $y^4 - 15y^2 + 24 = 10y$ .

Somando  $\alpha y^2 + \beta$  a ambos os membros, encontramos que

$$y^4 + (\alpha - 15)y^2 + (24 + \beta) = \alpha y^2 + 10y + \beta$$

A fim de que esses trinômios sejam quadrados perfeitos, é necessário e suficiente que os respectivos discriminantes sejam iguais a zero, ou seja

$$\begin{cases} (-15 + \alpha)^2 - 4(24 + \beta) = 0 & (i) \\ (-10)^2 - 4\alpha\beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{(-10)^2}{4\alpha} & (ii) \end{cases}$$

Substituindo (ii) na equação (i) concluímos que

$$(-15)^2 + 2 \cdot (-15)\alpha + \alpha^2 - 4 \cdot 24 - \frac{(-10)^2}{\alpha} = 0$$

daí

$$\alpha^3 - 30\alpha^2 + 129\alpha - 100 = 0$$

### 3.4. EQUAÇÃO DO 4º GRAU - MÉTODO DE FERRARI

---

Utilizando a fórmula de cardano para cúbicas encontramos  $\alpha \in S = \{1, 4, 25\}$ . Para  $\alpha = 1$  temos:  $\beta = 25$ , substituindo em:

$$y^4 - (15 - 1)y^2 + (24 + 25) = y^2 + 10y + 25$$

ou

$$y^4 - 14y^2 + 49 = y^2 + 10y + 25 \Rightarrow (y^2 - 7)^2 = (y + 5)^2.$$

Façamos,

$$y^2 - 7 = x + 5 \Rightarrow y^2 - y - 12 = 0 = \begin{cases} y_1 = -3 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

ou

$$y^2 - 7 = -x - 5 \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 = \begin{cases} y_3 = -2 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

Retornando a equação inicial  $h(x)$ , verificamos as raízes:

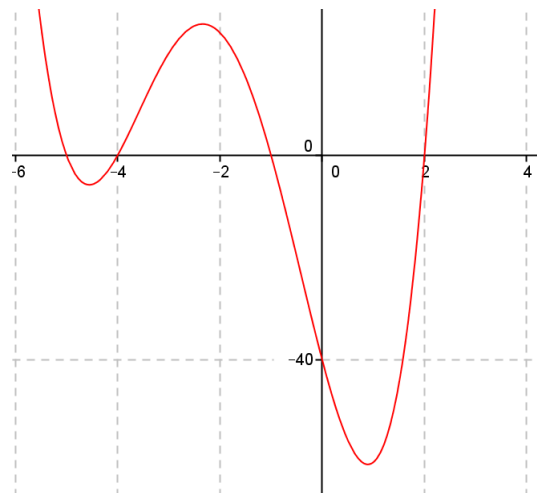
$$x_1 = y_1 - 2 = -3 - 2 = -5$$

$$x_2 = y_2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$x_3 = y_3 - 2 = -2 - 2 = -4$$

$$x_4 = y_4 - 2 = 1 - 2 = -1.$$

Então as raízes de  $h(x)$  são  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -4$  e  $x_4 = -1$ .



**Figura 3.9**

# Capítulo 4

## Métodos Iterativos para Obter Zeros de Funções

Os métodos de obtenção de zeros de funções que serão apresentados a seguir são para funções contínuas definidas em um intervalo fechado tomando valores em  $\mathbb{R}$ .

Porém, vamos nos restringir a aplicar tais métodos apenas no caso de funções polinomiais que é o foco deste trabalho.

Verificaremos a seguir alguns conceitos fundamentais, os quais serão necessários para um melhor entendimento dos métodos iterativos que serão vistos neste capítulo.

### 1. LIMITE

**Definição 4.1** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X \cap X'$ . Isto é,  $a$  é um ponto de acumulação de  $X$  pertencente a  $X$ .*

**Definição 4.2** *Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com valores reais, definida num subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$ . Diz-se neste caso que  $f$  é uma função real de uma variável real. Seja  $a \in \mathbb{R}$  um ponto de acumulação de  $X$ , isto é,  $a \in X'$ .*

*Diremos que o número real  $L$  é o limite de  $f$  quando  $x$  tende para  $a$ , e escrevemos*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

*para significar o seguinte: para cada número real  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, podemos encontrar  $\delta > 0$  de modo que se tenha  $|f(x) - L| < \varepsilon$  sempre que  $a \in X$  e  $0 < |x - a| < \delta$ .*

---

Portanto, quando  $a$  é ponto de acumulação do domínio de  $f$ , a expressão  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  é uma abreviatura para a afirmação abaixo:

$$\forall \varepsilon > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Nota-se que  $0 < |x - a| < \delta$  quer dizer que  $x$  pertence ao intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$  e é diferente de  $a$ . Assim,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  significa que, para todo intervalo aberto  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ , existe um intervalo aberto  $(a - \delta, a + \delta)$  tal que, pondo-se  $V_\delta = (X - a) \cap (a - \delta, a + \delta) = \{x \in X; 0 < |x - a| < \delta\}$ , vale  $f(V_\delta) \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

**Definição 4.3** Seja  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  uma seqüência de números reais. Dizemos que a seqüência  $a_n$  converge para um número real  $L$  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > n_0$ ,

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Neste caso a seqüência  $a_n$  é dita convergente e escrevemos  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$  para denotar que a seqüência  $a_n$  converge para  $L$ . Caso a seqüência não seja convergente ela é dita divergente.

## 2. FUNÇÕES CONTINUAS

**Definição 4.4** Dados uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}$  e  $a \in X$ , dizemos que  $f$  é contínua no ponto  $a$  se para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

se a função for contínua em todos os pontos do domínio  $X$ , dizemos que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua.

**Proposição 4.1** Dados  $X \subseteq \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  e  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas no ponto  $a \in X$ , então as funções  $f + g$ ,  $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , assim como  $\frac{f}{g}$  caso  $g(a) \neq 0$ , são contínuas.

**Proposição 4.2** Sejam  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínua no ponto  $a \in X$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  contínua no ponto  $b = f(a) \in Y$  e  $f(X) \subset Y$ , de modo que a função composta  $g(f(x))$  está bem definida. Então  $g(f(x))$  é contínua no ponto  $a$ . Em outras palavras, a composta de duas funções contínuas é contínua.



---

**Definição 4.5** Dado  $X \subseteq \mathbb{R}$ , dizemos que um número  $a$  é ponto de acumulação de  $X$  se existir uma sequência  $x_n$  em  $X$  que converge para  $a$ .

**Proposição 4.3** Dados  $X \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in X$  um ponto de acumulação de  $X$ , as seguintes afirmações são equivalentes:

i)  $f$  é contínua em  $a$ ;

ii)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ;

iii) Para toda sequência  $x_n$  em  $X$  com  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$  vale  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$ .

**Demonstração:**

(ii  $\Rightarrow$  i) Para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . O mesmo vale se  $|x - a| < \delta$ , porque se  $|x - a| = 0$ ,  $x = a$  e  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . Então,  $f$  é contínua em  $a$ .

(i  $\rightarrow$  iii) Seja  $x_n$  uma sequência em  $X$  com  $x_n \rightarrow a$ . Dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário, seja  $\delta$  tal que  $|x - a| < \delta$  implica  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . Para esse  $\delta$ , existe um natural  $n_0$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \delta \therefore |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ , e assim,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$ .

(iii  $\Rightarrow$  ii) Suponha que não valha (ii). Então, existe  $\varepsilon > 0$  e  $x \in X$  tal que para todo  $\delta > 0$ ,  $0 < |x - a| < \delta$  e  $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ . Em particular, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , considerando  $\delta = 1/n$ , existe  $x \in X$ , que chamaremos de  $x_n$ , tal que  $|x_n - a| < 1/n$  e  $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ . Logo,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ , mas não vale  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$ , o que contradiz (iii). Logo, devemos ter  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$ , o que completa a demonstração. ■

### 3. TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO (TVI)

**Teorema 4.1** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $f(a) < y < f(b)$  ou  $f(b) < y < f(a)$  então existe  $x \in (a, b)$  tal que  $f(x) = y$ .

A demonstração deste teorema será verificada pelo algoritmo da bissetão sucessiva, tema deste capítulo.

**Corolário 4.1** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $f(a)f(b) < 0$ . Então existe um número real  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

## 4.1 Método da Bisseção

Seja a função polinomial  $f$  contínua no intervalo  $[a, b]$  e tal que  $f(a)f(b) < 0$ , e pelo Teorema do Valor Intermediário temos neste intervalo pelo menos uma raiz da equação  $f$ .

Este método tem como objetivo reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até se atingir a precisão requerida  $(b - a) < \xi$ , usando para isto a sucessiva divisão de  $[a, b]$  ao meio.

Dada a função polinomial  $f$  e supondo que  $f(a_0) < 0 < f(b_0)$ , temos:  $f(a_0)f(b_0) < 0$ , então existe um  $\xi \in (a_0, b_0)$  tal que  $f(\xi) = 0$ .

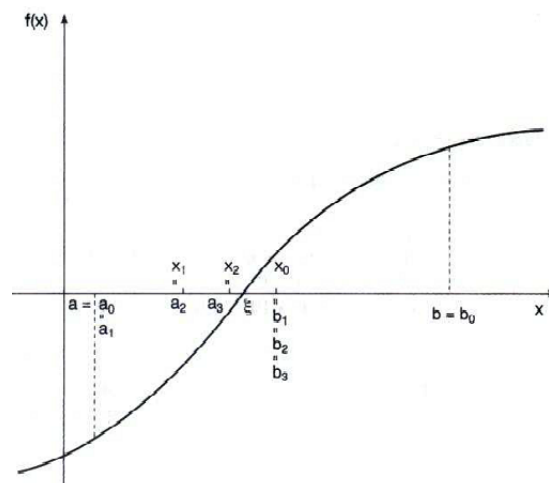


Figura 4.1

As iterações são realizadas da seguinte forma:

$$\text{Defina } x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

Se  $f(x_0) < 0$ , defina  $a_1 = x_0$  e  $b_1 = b_0$

Se  $f(x_0) > 0$ , defina  $a_1 = a_0$  e  $b_1 = x_0$

Finalmente defina  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, x_0, x_1, x_2, \dots$  indutivamente por

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

Então

$$a_{k+1} = \begin{cases} x_k, & \text{se } f(x_k) < 0 \\ a_k, & \text{se } f(x_k) > 0 \end{cases}$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k, & \text{se } f(x_k) < 0 \\ x_k, & \text{se } f(x_k) > 0 \end{cases}$$

#### 4.1. MÉTODO DA BISSEÇÃO

sendo  $x_k = \frac{a_k + b_k}{2} \cong \xi \Rightarrow f(x_k) \cong f(a_k) \cong f(b_k) \cong f(\xi) = 0$

**Exemplo 4.1** Dado o polinômio  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ , onde os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = -3$ ,  $c = 0$  e  $d = 3$ . Façamos a escolha de dois valores para  $x$ , no intervalo  $[a, b]$ , em que  $f(a_0)f(b_0) < 0$ . Logo nesse intervalo existe, pelo menos um  $\xi$  tal que  $f(\xi) = 0$ . Para fins desse exemplo consideraremos satisfatório um  $\xi$  onde  $f(\xi) = 2 \cdot 10^{-3}$ .

Pela fórmula de Cardano para as cúbicas temos:  $D = -\frac{3}{4} < 0$ , logo existem 3 raízes reais distintas. Para facilitar a convergência faremos uma tabela de valores para  $f(x)$  e consideraremos só os sinais, temos:

x	...	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	10	...
f(x)	-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	+	+	+	+	+

**Figura 4.2**

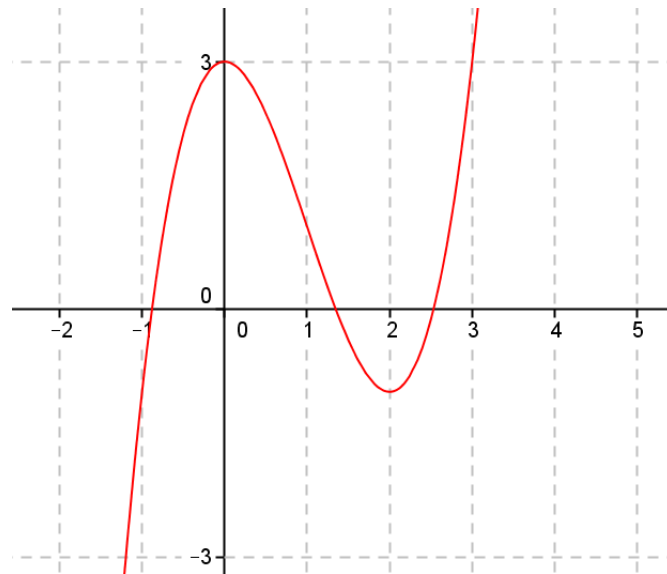
Podemos concluir que cada um dos intervalos  $I_1 = [-1; 0]$ ,  $I_2 = [1; 2]$  e  $I_3 = [2; 3]$  contém pelo menos um zero de  $f(x)$ , vejamos as iterações:

nº	a	b	x	h(x)	a	b	x	h(x)	a	b	x	h(x)
0	-1	0	-0,500	2,125	1	2	1,500	-0,375	2	3	2,500	-0,125
1	-1	-0,5	-0,750	0,891	1	1,5	1,250	0,266	2,5	3	2,750	1,109
2	-1	-0,750	-0,875	0,033	1,25	1,500	1,375	-0,072	2,5	2,750	2,625	0,416
3	-0,938	-0,875	-0,907	-0,210	1,250	1,375	1,313	0,093	2,500	2,625	2,563	0,127
4	-0,907	-0,875	-0,891	-0,089	1,313	1,375	1,344	0,009	2,500	2,563	2,532	-0,002
5	-0,891	-0,875	-0,883	-0,028	1,344	1,375	1,360	-0,032	2,531	2,563	2,547	0,061
6	-0,883	-0,875	-0,879	0,003	1,344	1,360	1,352	-0,012	2,531	2,547	2,539	0,028
7	-0,883	-0,879	-0,881	-0,012	1,344	1,352	1,348	-0,002	2,531	2,539	2,535	0,012
8	-0,881	-0,879	-0,880	-0,005	1,344	1,348	1,346	0,003	2,531	2,535	2,533	0,004
9	-0,880	-0,879	-0,880	-0,001	1,346	1,348	1,347	0,001	2,531	2,533	2,532	0,000

**Figura 4.3**

Então as raízes satisfatórias de  $f(x)$  são  $x_1 = -0,88$ ,  $x_2 = 1,347$  e  $x_3 = 2,532$

#### 4.1. MÉTODO DA BISSEÇÃO



**Figura 4.4**

**Exemplo 4.2** Dado o polinômio  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$ , onde os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = -3$ ,  $c = 1$  e  $d = 3$ . Façamos a escolha de dois valores para  $x$ , no intervalo  $[a, b]$ , em que  $f(a_0)f(b_0) < 0$ . Logo nesse intervalo existe, pelo menos um  $\xi$  tal que  $f(\xi) = 0$ . Para fins desse exemplo consideraremos satisfatório um  $\xi$  onde  $f(\xi) = 2 \cdot 10^{-3}$ .

Pela fórmula de Cardano para as cúbicas temos:  $D = \frac{703}{999} > 0$ , logo existem 1 raiz real e duas raízes complexas conjugadas. Para facilitar a convergência faremos uma tabela de valores para  $h(x)$  e consideraremos só os sinais, temos:

x	...	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	10	...
f(x)	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+

**Figura 4.5**

Podemos concluir que o intervalo  $I_1 = [-1; 0]$ , contém pelo menos um zero de  $f(x)$ , vejamos as iterações:

nº	a	b	x	h(x)
0	-1	0	-0,500	1,625
1	-1	-0,5	-0,750	0,141
2	-1	-0,75	-0,875	-0,842
3	-0,875	-0,750	-0,813	-0,329
4	-0,812	-0,750	-0,781	-0,087
5	-0,781	-0,750	-0,766	0,028
6	-0,781	-0,765	-0,773	-0,027
7	-0,773	-0,765	-0,769	0,002
8	-0,773	-0,769	-0,771	-0,013
8	-0,771	-0,769	-0,770	-0,002

**Figura 4.6**

Então a raiz real satisfatória de  $f(x)$  é  $x = -0,77$ .

**Figura 4.7**

### 4.1.1 Estudo da Convergência

Temos que se a função  $f$  é contínua no intervalo  $[a, b]$  e  $f(a)f(b) < 0$ , o método da Bisseção vai gerar uma sequência  $\{x_k\}$  que converge para a raiz.

Para provarmos de forma analítica a convergência faremos algumas considerações. Suponhamos que  $[a_0, b_0]$  seja o intervalo inicial e que a raiz  $\xi$  seja única no interior desse intervalo. Temos então, três sequências:

$\{a_k\}$ : não-decrescente e limitada superiormente por  $b_0$ ; então existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k) = r$ ;

$\{b_k\}$ : não-decrescente e limitado inferiormente por  $a_0$ , então existe  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (b_k) = s$ ;

$\{x_k\}$ : por construção  $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ , temos:  $a_k < x_k < b_k$ .

Como a amplitude de cada intervalo é a metade da amplitude,  $\forall k$  temos:

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}.$$

Daí segue que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k - b_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(a_0 - b_0)}{2^k} = 0$$

Como  $\{a_k\}$  e  $\{b_k\}$  são convergentes,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k - \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \Rightarrow r = s.$$

Seja  $l = r = s$  o limite das duas sequências. Dado que para todo  $k$  o ponto  $x_k \in (a_k, b_k)$ , temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l$$

. Resta provar que  $f(l) = 0$ . Em cada iteração  $k$  temos:  $f(a_k) - f(b_k) < 0$ .

Então,

$$0 \geq \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k)f(b_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} a_k)f(\lim_{k \rightarrow \infty} b_k) = f(r)f(s) = [f(l)]^2$$

Assim,  $f(l) = 0$ . Portanto  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l = \xi$ .

### 4.1.2 Estimativa do Número de Iterações

Dada uma precisão  $\xi$  e um intervalo inicial  $[a, b]$ , é possível saber, a priori, quantas iterações serão efetuadas pelo método da bisseção até que tenhamos  $b - a < \xi$ .

Sabemos que  $b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$ , daí temos de obter  $k$  de modo que  $b_k - a_k < \varepsilon$ , ou seja:

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \Rightarrow k \log 2 > \log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon \Rightarrow k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2}$$

Daí se  $k$  satisfaz a relação acima, ao final da iteração  $k$  teremos o intervalo  $[a, b]$  que contém a raiz  $\xi$ , tal que  $\forall x \in [a, b] \Rightarrow |x - \xi| \leq b - a < \xi$ .

## 4.2 Método da Posição Falsa

Seja  $f(x)$  contínua no intervalo  $[a, b]$  e tal que  $f(a)f(b) < 0$ .

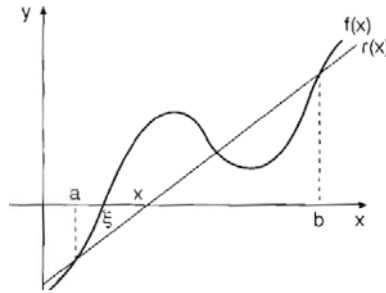
Suponhamos que o intervalo  $(a, b)$  contenha uma única raiz da equação  $f(x) = 0$ .

No caso do método da bisseção,  $x$  é simplesmente a média aritmética entre  $a$  e  $b$ , porém se observarmos a função  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ , no intervalo inicial  $[a, b] = [2, 3]$  e vimos no exemplo 4.1 que  $f(2) = -1 < 0 < 3 = f(3)$ . Como  $|f(2)|$  está mais próximo de zero que  $|f(3)|$ , é provável que a raiz esteja mais próxima de 2 que de 3 (pelo menos isto ocorre quando  $f(x)$  é linear em  $[a, b]$ ).

## 4.2. MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Assim, em vez de tomar a média aritmética entre  $a$  e  $b$ , o método da posição falsa toma a média aritmética ponderada entre  $a$  e  $b$  com pesos  $|f(b)|$  e  $|f(a)|$ , respectivamente:

$$x = \frac{a |f(b)| + b |f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$



**Figura 4.8**

Para  $f(a_0) < 0 < f(b_0)$  temos as iterações realizadas da seguinte forma:

Defina  $x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$

Se  $f(x_0) < 0$ , defina  $a_1 = x_0$  e  $b_1 = b_0$

Se  $f(x_0) > 0$ , defina  $a_1 = a_0$  e  $b_1 = x_0$ .

Finalmente defina  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, x_0, x_1, x_2, \dots$  indutivamente por

$$x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)};$$

Então

$$a_{k+1} = \begin{cases} x_k, & \text{se } f(x_k) < 0 \\ a_k, & \text{se } f(x_k) > 0 \end{cases}$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k, & \text{se } f(x_k) < 0 \\ x_k, & \text{se } f(x_k) > 0 \end{cases}$$

sendo  $x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \cong \xi \Rightarrow f(x_k) \cong f(\xi) = 0$ .

**Exemplo 4.3** Utilizaremos  $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3$  já vista no exemplo 4.1, vejamos as iterações:

### 4.3. MÉTODO DO PONTO FIXO - MPF

nº	a	b	x	h(x)		a	b	x	h(x)		a	b	x	h(x)
0	-1	0	-0,750	0,891		1	2	1,500	-0,375		2	3	2,250	-0,797
1	-1	-0,75	-0,868	0,087		1	1,5	1,364	-0,043		2,25	3	2,407	-0,434
2	-1	-0,868	-0,878	0,007		1	1,364	1,349	-0,004		2,41	3	2,482	-0,190
3	-1,000	-0,878	-0,880	-0,001		1,000	1,349	1,347	-0,001		2,513	3	2,525	-0,029
4											2,525	3	2,529	-0,011
5											2,529	3	2,532	0,000

Figura 4.9

**Exemplo 4.4** Utilizaremos  $h(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$  já vista no exemplo 4.2, vejamos as iterações:

nº	a	b	x	h(x)
0	-1	0	-0,600	1,104
1	-1	-0,6	-0,742	0,196
2	-1	-0,74	-0,765	0,030
3	-1	-0,765	-0,769	0,005
4	-1	-0,769	-0,769	0,000

Figura 4.10

Observamos então que, dependendo dos pontos escolhidos, o método da posição falsa necessita de um número menor de iterações em relação ao método da bisseção, ou seja converge mais rápido para as raízes.

### 4.3 Método do Ponto Fixo - MPF

Seja  $f(x)$  uma função contínua em  $[a, b]$ , intervalo contendo uma raiz da equação  $f(x) = 0$ .

MPF consiste em transformar esta equação em uma equação equivalente  $x = g(x)$  e a partir de uma aproximação inicial  $x_0$  gerar a sequência  $\{x_k\}$  de aproximação para  $\xi$  pela relação  $x_{k+1} = g(x_k)$ , pois a função  $g(x)$  é tal que  $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = \xi$ .

Uma função  $g(x)$  que satisfaz a condição acima é chamada de função de iteração para a equação  $f(x)$ .

A forma geral das funções de iteração  $g(x)$  é  $g(x) = x + A(x)f(x)$ , com a condição que em  $\xi$ , ponto fixo de  $g(x)$ , se tenha  $A(\xi) \neq 0$ .

**Proposição 4.4**  $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = \xi$



**Prova.**

( $\Rightarrow$ ) Seja  $\xi$  tal que  $f(\xi) = 0$ , daí  $g(\xi) = \xi + A(\xi)f(\xi) \Rightarrow g(\xi) = \xi$

( $\Leftarrow$ ) Se  $g(\xi) = \xi \Rightarrow \xi + A(\xi)f(\xi) = \xi \Rightarrow A(\xi)f(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$  ■

Nos gráficos a seguir, podemos observar que uma raiz da equação  $x = g(x)$  é a abscissa do ponto de interseção  $y = x$  da reta e da curva  $y = g(x)$ .

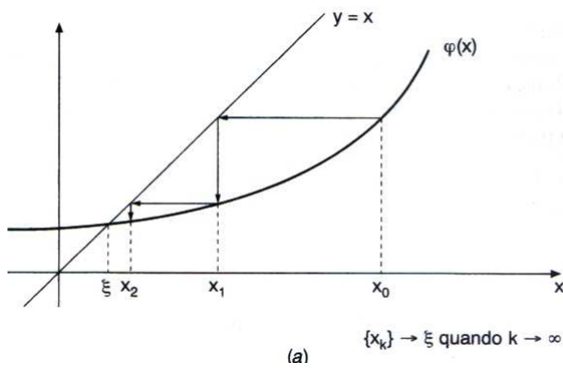


Figura 4.1: Convergente

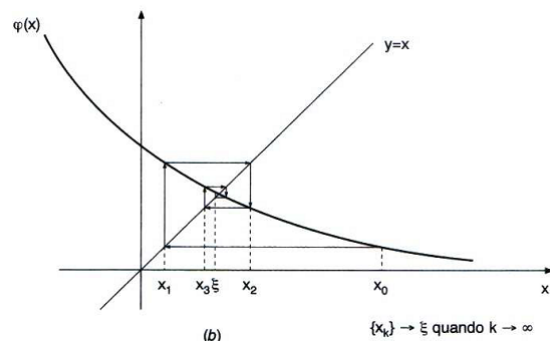


Figura 4.2: Convergente

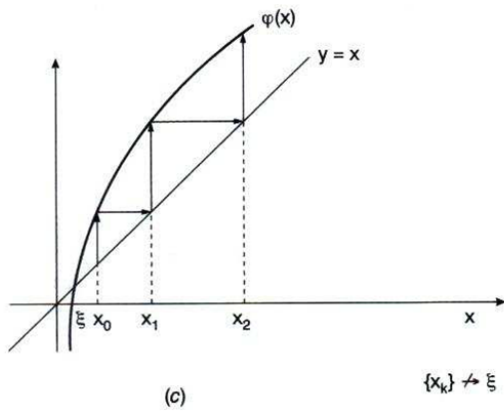


Figura 4.3: Divergente

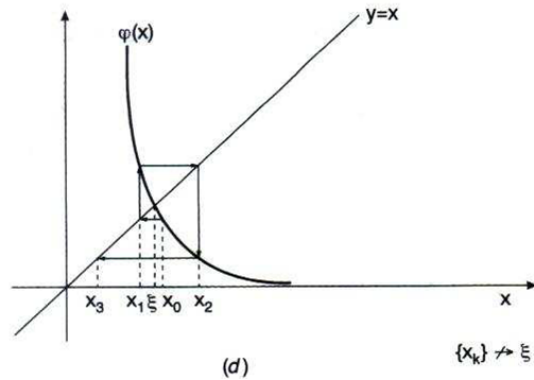


Figura 4.4: Divergente

Portanto, para certas  $g(x)$ , o processo pode gerar sequência divergente de  $\xi$ .

### 4.3.1 Estudo da Convergência do MPF

Temos que dada uma equação  $f(x) = 0$ , existe mais de uma função  $g(x)$ , tal que  $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$ .

**Teorema 4.2** *Seja  $\xi$  uma raiz da equação  $f(x) = 0$ , isolada num intervalo  $I$  centrado em  $\xi$ . Seja  $g$  uma função de iteração para a equação  $f(x) = 0$ .*

Se

(i)  $g(x)$  e  $g'(x)$  são contínuas em  $I$ ;

(ii)  $|g'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$ ;

(iii)  $x_0 \in I$ .

Então a sequência  $\{x_k\}$  gerada pelo processo iterativo  $x_{k+1} = g(x_k)$  converge para  $\xi$ .

**Prova.** Faremos a prova deste teorema em duas partes

1) Se  $x_0 \in I$ , então  $x_k \in I, \forall k$ ;

2)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$$

;

1)  $\xi$  é uma raiz exata da equação  $f(x) = 0$ . Assim,  $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = g(\xi)$  e, para qualquer  $k$ , temos:

$$x_{k+1} = g(x_k) \Rightarrow x_{k+1} - \xi = g(x_k) - g(\xi).$$

Como,  $g(x)$  é contínua e diferenciável em  $I$ , pelo teorema do valor médio, se  $x_k \in I$ , existe  $c_k$  entre  $x_k$  e  $\xi$  tal que:

$$g'(c_k)(x_k - \xi) = g(x_k) - g(\xi).$$

Portanto, temos:

$$x_{k+1} - \xi = g(x_k) - g(\xi) = g'(c_k)(x_k - \xi), \forall k.$$

Assim,  $x_{k+1} - \xi = g'(c_k)(x_k - \xi)$ . Então,  $\forall k$  temos:

$$|x_{k+1} - \xi| = |g'(c_k)| |x_k - \xi| < |x_k - \xi|,$$

pois  $|g'(c_k)| < 1$  temos que a distância entre  $x_{k+1}$  e  $\xi$  é estritamente menor que a distância entre  $x_k$  e  $\xi$ , e como  $I$  está centrado em  $\xi$ , temos que se  $x_k \in I$ , então  $x_{k+1} \in I$ . Por hipótese,  $x_0 \in I$ , então  $x_k \in I, \forall k$ .

2) Provemos agora que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$ .

Temos:

$$|x_1 - \xi| = |g(x_0) - g(\xi)| = |g'(c_0)| |x_0 - \xi| \leq M |x_0 - \xi| \quad (c_0 \text{ está entre } x_0 \text{ e } \xi)$$

$$|x_2 - \xi| = |g(x_1) - g(\xi)| = |g'(c_1)| |x_1 - \xi| \leq M^2 |x_0 - \xi| \quad (c_1 \text{ está entre } x_1 \text{ e } \xi)$$

### 4.3. MÉTODO DO PONTO FIXO - MPF

$|x_k - \xi| = |g(x_{k-1}) - g(\xi)| = |g'(c_{k-1})| |x_{k-1} - \xi| \leq M |x_{k-1} - \xi| \leq \dots \leq M^k (x_0 - \xi)$  ( $c_k$  está entre  $x_k$  e  $\xi$ )

Então,  $0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - \xi| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} M^k |x_0 - \xi| = 0$ , pois  $0 < M < 1$ .

Assim,  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - \xi| = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$  ■

**Exemplo 4.5** Dado o polinômio  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ , onde os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = 4$ ,  $c = 0$  e  $d = -10$ . Pela fórmula de Cardano para as cúbicas temos:  $D = 1,2963 > 0$ , logo existe uma raiz real e duas complexas conjugadas. Para facilitar a convergência faremos uma tabela de valores para  $f(x)$  e consideraremos só os sinais, temos:

x	...	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	10	...
f(x)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+

**Figura 4.11**

Podemos concluir que o intervalo  $I = [1; 2]$  contém pelo menos um zero de  $f(x)$ .

Existem várias maneiras pelas quais a equação pode ser manipulada para obtermos a forma de ponto fixo  $x = g(x)$ . Verificaremos algumas a seguir:

$$x = g_1(x) = x^3 + 4x^2 + x - 10;$$

$$x = g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x};$$

$$x = g_3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{10 - x^3};$$

$$x = g_4(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}.$$

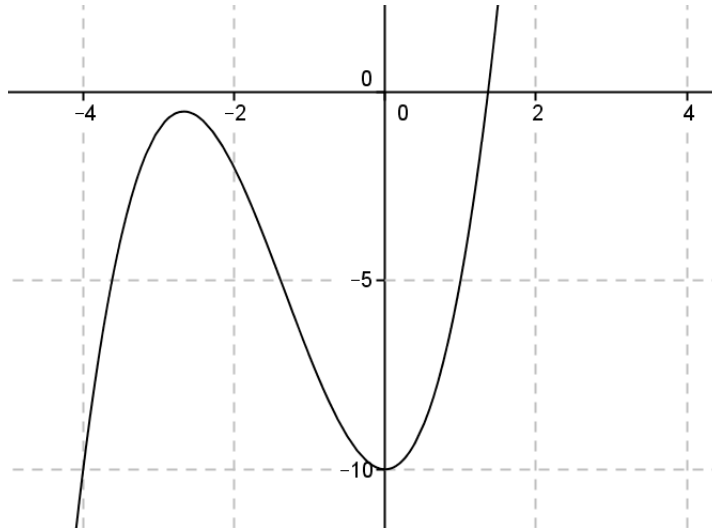
Para fins desse exemplo consideraremos satisfatório um  $\xi$  onde  $f(\xi) = 2 \cdot 10^{-3}$ .

Como valor inicial pode ser a média aritmética do intervalo  $I$ , ou seja  $x_0 = \frac{1+2}{2} = 1,5$ , vejamos as iterações:

k	g1	f(x)	g2	f(x)	g3	f(x)	g4	f(x)
0	1,500	2,375	1,500	2,375	1,5000	2,375	1,5000	2,375
1	-0,875	-7,607	0,816	-6,789	1,2870	-1,243	1,3733	0,134
2	6,732	476,452	2,997	52,842	1,4025	0,627	1,3675	0,038
3	-469,720	-102755024,907			1,3455	-0,323	1,3659	0,010
4					1,3752	0,165	1,3654	0,003
5					1,3601	-0,085	1,3653	0,001
6					1,3678	0,043		
7					1,3639	-0,022		
8					1,3659	0,011		
9					1,3649	-0,006		
10					1,3654	0,003		
11					1,3651	-0,002		
12					1,3653	0,001		

**Figura 4.12**

Então a raiz satisfatória de  $f(x)$  é  $x = 1,3653$ .



**Figura 4.13**

Podemos observar na tabela que, mesmo todos os pontos fixos tendo sido obtido da mesma função  $f(x)$ , nem sempre a convergência acontece como esperamos.

Analisaremos alguns dos possíveis motivos para que isso não aconteça, de acordo com o teorema 4.1:

-Para  $g_1$ , temos:  $g'_1 = -3x^2 - 8x + 1$ , ou seja,  $|g'_1(x)| \geq 1$  para todo  $x \in I$ .

O teorema 4.1 não afirma que o método do ponto fixo vá falhar, porém não há motivos para que a convergência seja esperada.

-Para  $g_2$ , não está definido para todo  $x \in I$ .

Portando, também, não existe motivos para que o Método do Ponto Fixo faça a convergência esperada.

No caso de  $g_3$  e  $g_4$ , observamos que a convergência acontece de forma mais rápida em  $g_4$ , na próxima secção veremos porque isso acontece.

## 4.4 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson tenta acelerar a convergência do MPF, nesta tentativa é escolhida para função de iteração, a função  $g(x)$  tal que  $g'(\xi) = 0$ .

Então, dada a equação  $f(x) = 0$  e partindo da forma geral  $g$ , queremos obter a função  $A(x)$  tal que  $g'(\xi) = 0$ .

#### 4.4. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Temos:

$$g(x) = x + A(x)f(x) \Rightarrow g''(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x) \Rightarrow g'(\xi) = 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi) \Rightarrow g'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi).$$

$$\text{Logo, } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + A(\xi)f'(\xi) = 0 \Rightarrow A(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)} \Rightarrow A(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Então, dada  $f(x)$ , a função de iteração  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  será tal que  $g'(\xi) = 0$ , pois

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x).f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x).f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

e, como  $f(\xi) = 0, g'(\xi) = 0$  (desde que  $f'(\xi) \neq 0$ ).

Assim, escolhido  $x_0$ , a sequência  $\{x_k\}$  será determinada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots$$

**Exemplo 4.6** Dado o polinômio  $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ , onde os coeficientes são  $a = -2, b = -3, c = 5$  e  $d = 2$ . Pela fórmula de Cardano para as cúbicas temos:  $D = -1, 21 < 0$ , logo existem 3 raiz reais distintas. Para facilitar a convergência faremos uma tabela de valores para  $f(x)$  e consideraremos só os sinais, temos:

x	...	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	10	...
f(x)	+	+	+	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	-	-

**Figura 4.14**

Podemos concluir que os intervalos  $I_1 = [-3; -2], I_2 = [-1; 0]$  e  $I = [1; 2]$  contém pelo menos um zero de  $h(x)$ . Para fins desse exemplo consideraremos satisfatório um  $\xi$  onde  $f(\xi) = 2.10^{-3}$ .

Façamos:

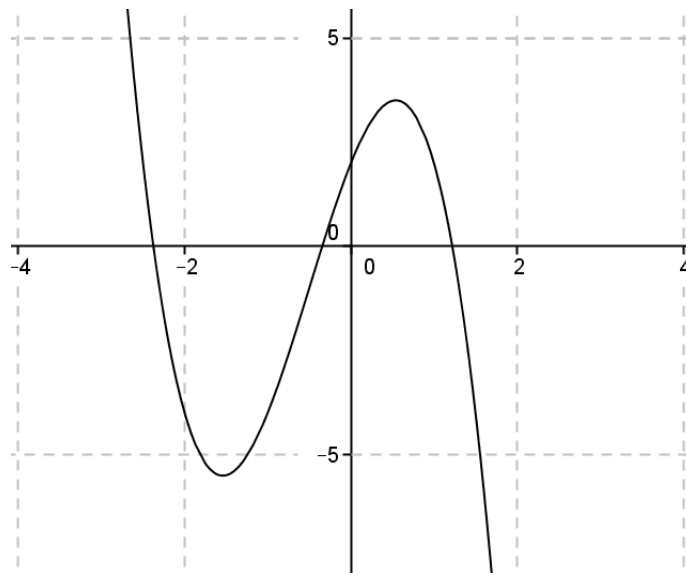
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{-2x_0^3 - 3x_0^2 + 5x_0 + 2}{-6x_0^2 - 6x_0 + 5} = \frac{-4x_0^3 - 3x_0^2 - 2}{-6x_0^2 - 6x_0 + 5}.$$

Como valor inicial pode ser as médias aritméticas dos intervalos  $I$ , ou seja  $x_0 = \frac{-3 - 2}{2} = -2,5$  para o intervalo  $[-3; -2]$ ,  $x_0 = \frac{-1 + 0}{2} = -0,5$  para o intervalo  $[-1; 0]$  e  $x_0 = \frac{1 + 2}{2} = 1,5$  para o intervalo  $[1; 2]$ . vejamos as iterações:

k	g2	f(x)	g3	f(x)	g4	f(x)
0	-2,5000	2,000	-0,5000	-1,000	1,5000	-4,000
1	-2,3857	0,154	-0,3462	-0,007	1,2714	-0,603
2	-2,3754	0,001	-0,3450	0,000	1,2225	-0,025
3					1,2203	0,000

**Figura 4.15**

Então as raízes satisfatórias de  $f(x)$  são  $x_1 = -2,3754$ ,  $x_2 = 0,345$  e  $x_3 = 1,2203$ .



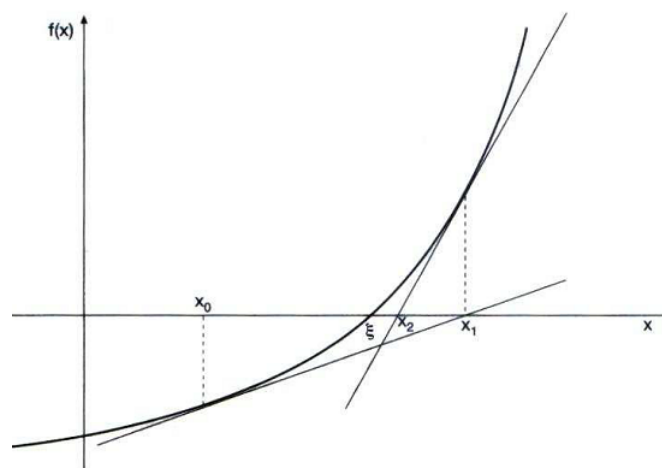
**Figura 4.16**

#### 4.4.1 Motivação Geométrica

Dado o ponto  $(x_k, f(x_k))$  traçamos a reta  $L_k(x)$  tangente à curva neste ponto

$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$ , daí,  $L_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x)}$ , fazemos então

$x_{k+1} = x$ .



**Figura 4.17**

### 4.4.2 Estudo da Convergência do Método de Newton-Raphson

**Teorema 4.3** *Sejam  $f(x), f'(x), f''(x)$  contínuas num intervalo  $I$  que contém a raiz  $x = \xi$  de  $f(x) = 0$ . Supondo  $f'(\xi) \neq 0$ . Então, existe  $I_1 \subset I$ , contendo a raiz  $\xi$ , tal que se  $x_0 \in I$ , a sequência  $\{x_k\}$  gerada pela fórmula recursiva  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  convergirá para a raiz.*

**Prova.** Temos que o método de Newton-Raphson é um MPF com função de iteração  $g(x)$ , dada por

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Precisamos provar que existe  $I_1 \subset I$  centrado em  $\xi$ , tal que

- i)  $g(x)$  e  $g'(x)$  são contínuas em  $I$ ;
- ii)  $|g'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$ .

Temos:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ e } g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Como por hipótese,  $f'(x) \neq 0$  e,  $f'(x)$  é contínua em  $I$ , é possível obter  $I_1 \subset I$  tal que  $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$ .

Assim, no intervalo  $I_1 \subset I$ , tem-se  $f(x), f'(x), f''(x)$  são contínuas e  $f'(x) \neq 0$ .

Daí,  $g(x)$  e  $g'(x)$  são contínuas em  $I$ . Agora,  $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ . Como  $g'(x)$  é contínua em  $I_1$  e  $g'(\xi) \neq 0$ , é possível escolher  $I_2 \subset I_1$  tal que  $|g'(x)| < 1, \forall x \in I_2$  e, ainda mais,  $I_2$  pode ser escolhido de forma que  $\xi$  seja seu centro. Conclusão, conseguimos obter  $I_2 \subset I$ , centrado em  $\xi$ , tal que  $g(x)$  e  $g'(x)$  sejam contínuas em  $I_2$  e  $|g'(x)| < 1, \forall x \in I_2$ . Assim,  $I = I_2$ . Portanto, se  $x_0 \in I$ , a sequência  $\{x_k\}$  gerada pelo processo iterativo  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  converge para a raiz  $\xi$ . ■

### 4.4.3 Ordem de Convergência

Supondo que o método de Newton-Raphson gera uma sequência  $\{x_k\}$  que converge para  $\xi$ . Ao observarmos como um MPF, poderíamos dizer que ele tem ordem de convergência linear. Porém, veremos que o fato de ser uma função de iteração tal que  $g'(\xi) = 0$  nos leva a provar que a ordem de convergência é quadrática.

Começaremos supondo que estão satisfeitas as hipóteses do teorema 3.2, temos:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow x_{k+1} - \xi = x_k - \xi - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_{k+1}$$

Agora desenvolvendo  $f(x)$  em torno de  $x_k$ , temos:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_k)^2, \quad c_k \text{ entre } x \text{ e } x_k.$$

Assim,

$$0 = f(\xi) = f(x_k) - f'(x_k)(x_k - \xi) + \frac{f''(c)}{2}(x_k - \xi)^2 \Rightarrow f(x_k) = f'(x_k)(x_k - \xi) - \frac{f''(c_k)}{2}(x_k - \xi)^2.$$

Dividindo toda a equação por  $f'(x_k)$

$$\frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)}e_k^2 = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + e_k = e_{k+1} \Rightarrow \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2} \frac{f''(c_k)}{f'(x_k)}$$

dai,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f''(c_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{2} \frac{f''(\lim_{k \rightarrow \infty} c_k)}{f'(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k)} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{1}{2} g''(\xi) = c.$$

Portanto, o método de Newton-Raphson tem convergência quadrática.

## 4.5 Método da Secante

Tal método consiste em substituir a derivada  $f'(x)$ , utilizada no método de Newton-Raphson, pelo quociente das diferenças:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Onde  $x_k$  e  $x_{k-1}$  são duas aproximações para a raiz.

Neste caso, a função de iteração fica:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

**Exemplo 4.7** Dado o polinômio  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 2$ , onde os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = -2$  e  $d = 2$ . Pela fórmula de Cardano para as cúbicas temos:  $D = -1,37 < 0$ , logo existem 3 raiz reais distintas. Para facilitar a convergência faremos uma tabela de valores para  $f(x)$  e consideraremos só os sinais, temos:

x	...	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	10	...
f(x)	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	+

Figura 4.18



#### 4.6. MÉTODO DE MULLER

Podemos concluir que os intervalos  $I_1 = [-2; -1]$ ,  $I_2 = [0; 1]$  e  $I = [2; 3]$  contém pelo menos um zero de  $f(x)$ . Para fins desse exemplo consideraremos satisfatório um  $\xi$  onde  $f(\xi) = 2 \cdot 10^{-3}$ .

Façamos:

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

Consideraremos Como valores iniciais  $x_0 = -2$  e  $x_1 = -1$  para o intervalo  $[-2; -1]$ ,  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1$  para o intervalo  $[0; 1]$  para o intervalo  $[-1; 0]$  e  $x_0 = 2$  e  $x_1 = 3$  para o intervalo  $[2; 3]$ . vejamos as iterações:

nº	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
0	-2		0		2	
1	-1		1		3	
2	-1,091	0,503	0,667	0,074	2,286	-1,079
3	-1,183	-0,089	0,690	-0,003	2,412	-0,424
4	-1,169	0,006	0,689	0,000	2,495	0,089
5	-1,170	0,000			2,480	-0,005
6					2,481	0,000

Figura 4.19

Então as raízes satisfatórias de  $f(x)$  são  $x_1 = -1,17$   $x_2 = -0,689$   $x_3 = 2,481$

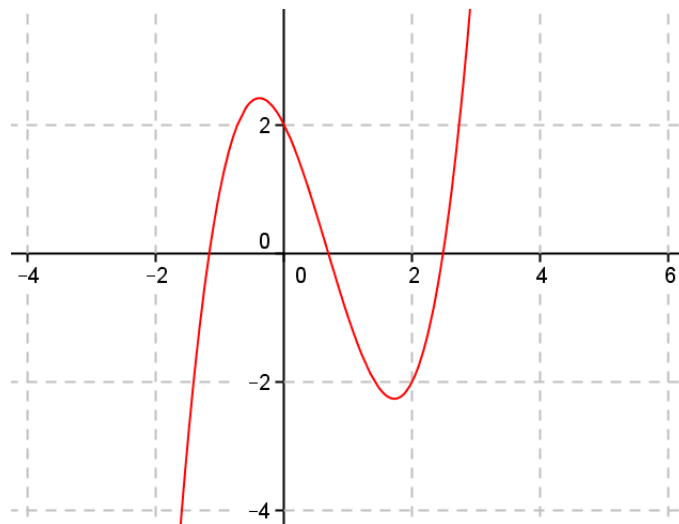


Figura 4.20

### 4.6 Método de Muller

O método de Muller, uma generalização da abordagem utilizada no método da secante, onde ao invés da aproximação ser feita pela reta que passa por dois pontos

da curva, é feita pela parábola que passa por três pontos dados, utilizado para obter uma ou mais raízes reais de uma função  $f(x)$ .

Dados três valores reais,  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$ , um polinômio quadrático é construído de modo que os três pontos  $(x_i, f(x_i))$ , com  $i = 0, 1, 2$ , são interpolados. Uma das raízes deste polinômio é utilizada como uma aproximação inicial para uma raiz de  $f(x)$ .

O polinômio quadrático de interpolação é obtido através da fórmula de interpolação de Newton-Raphson, dado por

$$p(x) = f(x_2) + (x - x_2)f[x_2, x_1] + (x - x_2)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] \quad (1)$$

onde as diferenças divididas  $f[x_2, x_1]$  e  $f[x_2, x_1, x_0]$  são definidas como segue (2)

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_1, x_0] - f[x_2, x_1]}{x_0 - x_1}.$$

Note que se  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  são distintos, as diferenças obtidas são de primeira e segunda ordem, respectivamente.

Substituindo  $x_i$  em (1) e reduzindo a expressão obtida através de (2). A fórmula (1) é chamada de forma das diferenças divididas de Newton-Raphson da interpolação polinomial.

Reescrevendo (1) em uma forma mais conveniente, temos:

$$p(x) = a(x - x_2)^2 + 2b(x - x_2) + c$$

onde

$$\begin{cases} a = f[x_2, x_1, x_0] \\ b = \frac{1}{2} (f[x_2, x_1] + (x_2 - x_1)f[x_2, x_1, x_0]) \\ c = f(x_2) \end{cases}$$

Se  $h$  é a raiz de menor valor absoluto da fórmula quadrática  $ah^2 + 2bh + c = 0$ , então  $x_3 = x_2 + h$  é a raiz de  $p(x)$ , muito próxima de  $x_2$ .

Para encontrar a menor raiz da equação quadrática, utilizamos a solução padrão

$$h = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Por questões de estabilidade numérica, racionalizando o numerador, temos:

$$x_3 = x_2 + \frac{2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

Onde o sinal da raiz quadrada é escolhido de modo a maximizar o valor absoluto do denominador, como estamos interessados na raiz mais próxima de  $x_{i-1}$ , devemos escolher o mesmo sinal de  $b$  para tornar o denominador o maior possível, ou seja sendo o sinal positivo para  $b \geq 0$  e negativo para  $b < 0$ .

Genericamente, temos que o método de Muller consiste no seguinte processo recursivo (4)

$$x_{i+1} = x_i + \frac{2c_i}{b_i \pm \sqrt{b_i^2 - 4a_i c_i}}$$

onde

$$\begin{cases} a_i = f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i] \\ b_i = \frac{1}{2} (f[x_i, x_{i-1}] + (x_i - x_{i-1})f[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]) \\ c_i = f(x_i) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a_i = \frac{(x_{i-1} - x_i)(f(x_{i-2}) - f(x_i)) - (x_{i-2} - x_i)(f(x_{i-1}) - f(x_i))}{(x_{i-2} - x_{i-1})(x_{i-2} - x_i)(x_{i-1} - x_i)} \\ b_i = \frac{(x_{i-2} - x_i)^2(f(x_{i-1}) - f(x_i)) - (x_{i-1} - x_i)^2(f(x_{i-2}) - f(x_i))}{(x_{i-2} - x_{i-1})(x_{i-2} - x_i)(x_{i-1} - x_i)} \\ c_i = f(x_i) \end{cases}$$

Repetindo (4) iterativamente, temos que se a sequência gerada  $\{x_n : n > 0\}$  converge para um ponto  $\alpha$  e que se  $f'(\alpha) \neq 0$ , então  $\alpha$  é uma raiz de  $f(x)$ .

Note que se  $a = 0$  então a interpolação linear em cada iteração é equivalente ao método da secante. Se  $a = b = 0$ , então  $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$ . Neste caso, iteração deve ser retomada com diferentes valores iniciais.

#### 4.6. MÉTODO DE MULLER

**Exemplo 4.8** Dado o polinômio  $f(x) = x^3 - 4x - 1$ , onde os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = -4$  e  $d = -1$ . Pela fórmula de Cardano para as cúbicas temos:  $D = -2, 12 < 0$ , logo existem 3 raiz reais distintas. Para facilitar a convergência faremos uma tabela de valores para  $f(x)$  e consideraremos só os sinais, temos:

x	...	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	10	...
f(x)	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	+

**Figura 4.21**

Podemos concluir que os intervalos  $I_1 = [-2; -1]$ ,  $I_2 = [-1; 0]$  e  $I = [2; 3]$  contém pelo menos um zero de  $f(x)$ . Para fins desse exemplo consideraremos satisfatório um  $\xi$  onde  $f(\xi) = 2 \cdot 10^{-3}$ .

Façamos:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{2c_i}{b_i \pm \sqrt{b_i^2 - 4a_i c_i}}$$

Com

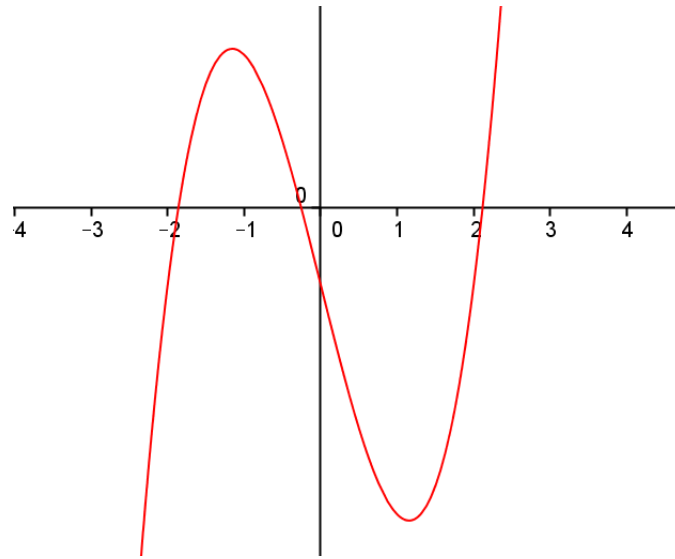
$$\left\{ \begin{array}{l} a_i = \frac{(x_{i-1} - x_i)(f(x_{i-2}) - f(x_i)) - (x_{i-2} - x_i)(f(x_{i-1}) - f(x_i))}{(x_{i-2} - x_{i-1})(x_{i-2} - x_i)(x_{i-1} - x_i)} \\ b_i = \frac{(x_{i-2} - x_i)^2(f(x_{i-1}) - f(x_i)) - (x_{i-1} - x_i)^2(f(x_{i-2}) - f(x_i))}{(x_{i-2} - x_{i-1})(x_{i-2} - x_i)(x_{i-1} - x_i)} \\ c_i = f(x_i) \end{array} \right.$$

Consideraremos Como valores iniciais  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = -2$  e  $x_2 = -3$  para o intervalo  $[-2; -1]$ ,  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$  para o intervalo  $[-1; 0]$  e  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 3$  e  $x_2 = 4$  para o intervalo  $[2; 3]$ . vejamos as iterações:

	x	f(x)	a	b	c		x	f(x)	a	b	c		x	f(x)	a	b	c
0	-1,000	2,000				0	-1,000	2,000				0	2,000	-1,000			
1	-2,000	-1,000				1	0,000	-1,000				1	3,000	14,000			
2	-3,000	-16,000	-6,0	-21,0	-16,0	2	1,000	-4,000	0,0	3,0	-4,0	2	4,000	47,000	9,0	-42,0	47,0
3	-1,879	-0,119	-6,9	-6,5	-0,1	3	-0,333	0,296	0,7	4,1	0,3	3	2,138	0,222	9,1	-8,1	0,2
4	-1,860	0,003	-6,7	-6,4	0,0	4	-0,260	0,024	0,4	3,7	0,0	4	2,110	-0,047	8,2	-9,3	0,0
5	-1,861	0,000				5	-0,254	-0,001				5	2,115	0,000			

**Figura 4.22**

Então as raízes satisfatórias de  $f(x)$  são  $x_1 = -1,861$   $x_2 = -0,254$   $x_3 = 2,115$ .



*Figura 4.23*

# Capítulo 5

## Sugestões de Alguns Exercícios para Aplicação no Ensino Básico

Veremos a seguir alguns exercícios que visam a resolução de algumas funções no que diz respeito a encontrar as raízes das mesmas, o que dará suporte no entendimento dos métodos vistos nos capítulos anteriores.

A escolha de um método não serve de parâmetro e garantia de que o mesmo seja a melhor forma de resolução para o determinado exercício, ele apenas ilustra um dos meios que a equação pode ser resolvida.

### 5.1 Exercício de Função Polinomial do 1º grau

**Exercício 5.1** Dada a função  $f(x) = \frac{5x}{4} - 3$ , determine a raiz e represente seu gráfico.

**Resolução: 1** Temos:  $f(x) = \frac{5x}{4} - 3$ , e para encontrarmos raiz precisamos que  $f(x) = 0$ , logo  $\frac{5x}{4} - 3 = 0$  e como se trata de uma função do 1º grau a raiz acontece quando  $x = -\frac{b}{a}$  nesse caso  $a = \frac{5}{4}$  e  $b = -3$ , então  $x = -\frac{(-3)}{\frac{5}{4}} = \frac{12}{5}$ .

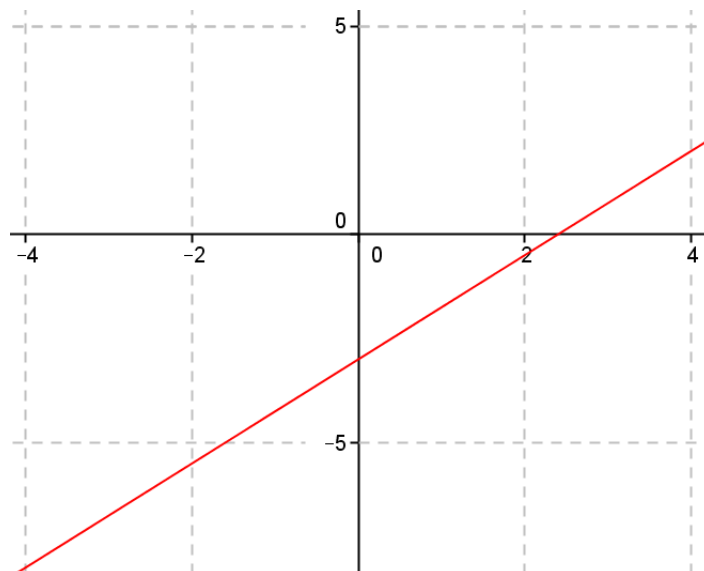


Figura 5.1

## 5.2 Exercício de Função Polinomial do 2º grau

**Exercício 5.2** Dada a função  $f(x) = -3x^2 - x + 5$ , determine as raízes, Utilizando a fórmula de Bhaskara e o método da Bisseção, e represente seu gráfico.

**Resolução: 2** Temos:  $f(x) = -3x^2 - x + 5$ , e para encontrarmos as raízes precisamos que  $f(x) = 0$ , logo  $-3x^2 - x + 5 = 0$ , com  $a = -3$ ,  $b = -1$  e  $c = 5$ . Como se trata de uma função do 2º grau verificamos que  $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 = 61 > 0$ , logo  $f(x)$  tem duas raízes reais distintas.

Utilizando a **fórmula de Bhaskara** encontramos  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{61}}{2 \cdot (-3)}$ , fazendo  $\sqrt{61} \approx 7,8102$ , temos:

$$x_1 = \frac{1 + 7,81}{2 \cdot (-3)} = -1,468$$

e

$$x_2 = \frac{1 - 7,81}{2 \cdot (-3)} = 1,135.$$

Pelo **método da Bisseção**, para facilitar a convergência faremos uma tabela de valores para  $f(x)$  e consideraremos só os sinais, temos:

x	...	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	10	...
f(x)	-	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-	-

Figura 5.2

### 5.3. EXERCÍCIO DE FUNÇÃO POLINOMIAL DO 3º GRAU

faremos as iterações para os intervalos  $[a_0; b_0] = [-2; -1]$  e  $[c_0; d_0] = [1; 2]$ , vejamos a tabela de iterações:

nº	a	b	x	f(x)	a	b	x	f(x)
0	-2	-1	-1,500	-0,25	1	2	1,500	-3,250
1	-1,5	-1	-1,250	1,563	1	1,5	1,250	-0,938
2	-1,500	-1,250	-1,375	0,703	1,000	1,250	1,125	0,078
3	-1,500	-1,380	-1,440	0,219	1,125	1,250	1,188	-0,418
4	-1,500	-1,440	-1,470	-0,013	1,125	1,188	1,157	-0,169
5	-1,470	-1,440	-1,455	0,104	1,125	1,157	1,141	-0,047
6	-1,470	-1,455	-1,463	0,046	1,125	1,141	1,133	0,016
7	-1,470	-1,463	-1,467	0,015	1,133	1,141	1,137	-0,015
8	-1,469	-1,468	-1,469	-0,001	1,133	1,137	1,135	0,000

Figura 5.3

Logo, as raízes satisfatórias de  $f(x)$  são  $x_1 = -1,468$ ,  $x_2 = 1,135$

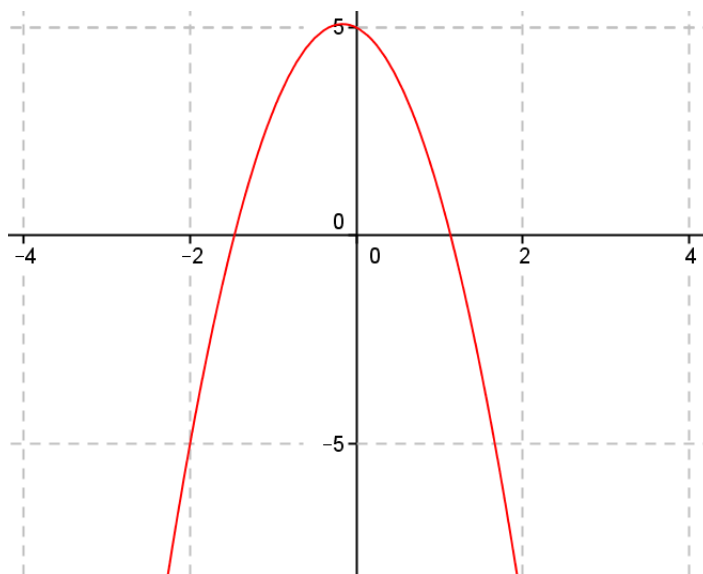


Figura 5.4

### 5.3 Exercício de Função Polinomial do 3º grau

**Exercício 5.3** Dada a função  $f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 2x - 1$ , determine as raízes, Utilizando a fórmula de Cardano e o método da Posição Falsa, e represente seu gráfico.

**Resolução: 3** Temos:  $f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 2x - 1$ , e para encontrarmos as raízes precisamos que  $f(x) = 0$ , logo  $8x^3 + 4x^2 - 2x - 1 = 0$ . Para utilizarmos a fórmula



### 5.3. EXERCÍCIO DE FUNÇÃO POLINOMIAL DO 3º GRAU

de Cardano é necessário que façamos a forma reduzida eliminando o  $x^2$ , ficando a equação o 3º grau do tipo  $y^3 + py + q = 0$ . Portanto temos:

$$\frac{1}{8}(8x^3 + 4x^2 - 2x - 1) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} = 0.$$

Sendo  $a = 1$ ,  $b = \frac{1}{2}$ ,  $c = -\frac{1}{4}$  e  $d = -\frac{1}{8}$ . Consideremos  $x = y - \frac{b}{3} = y - \frac{1}{6}$ , logo:

$$\left(y - \frac{1}{6}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} = y^3 - \frac{y}{3} - \frac{74}{999} = 0$$

Com  $p = -\frac{1}{3}$  e  $q = \frac{74}{999}$ , fazemos  $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{74}{999 \cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^3 = 0$ ,

logo a equação tem 3 raízes reais sendo duas repetidas.

Utilizando a **fórmula de Cardano** para as cúbicas, quando  $D=0$ , as raízes são:

$$y_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = 2\sqrt[3]{-\frac{\left(-\frac{74}{999}\right)}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$y_2 = y_3 = (w + \bar{w})u_1 = -u_1 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = -\sqrt[3]{-\frac{\left(-\frac{74}{999}\right)}{2}} = -\frac{1}{3}$$

com isso  $x_1 = y_1 - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$  e  $x_2 = x_3 = y_2 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$ .

Pelo **método da falsa posição**, Para facilitar a convergência faremos uma tabela de valores para  $f(x)$  e consideraremos só os sinais, temos:

x	...	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	10	...
f(x)	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+

**Figura 5.5**

Faremos as iterações para o intervalo  $[a_0; b_0] = [0; 1]$ , vejamos a tabela de iterações:

nº	a	b	x	h(x)
0	0	1	0,100	-1,152
1	0	0,1	-0,658	-0,231
2	-0,66	1	-0,616	-0,121
3	-0,500	1	-0,500	0,000

**Figura 5.6**

#### 5.4. EXERCÍCIO DE FUNÇÃO POLINOMIAL DO 4º GRAU

Como não existe outro intervalo que  $f(a)f(b) < 0$ , encontraremos os pontos restantes reduzindo a equação para uma de 2º grau e utilizaremos a fórmula de Bhaskara. Pela proposição 2.1, se  $\frac{1}{2}$  é raiz de  $f(x)$ , então  $(x - \frac{1}{2}) \mid f(x)$ , vejamos:

$$\frac{8x^3 + 4x^2 - 2x - 1}{x - \frac{1}{2}} = 8x^2 + 8x + 2.$$

Assim  $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 8 \cdot 2 = 0$ , logo duas raízes reais iguais. As raízes são:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}.$$

Logo, as raízes de  $f(x)$  são  $x_1 = -\frac{1}{2}$  e  $x_2 = \frac{1}{2}$ .



Figura 5.7

#### 5.4 Exercício de Função Polinomial do 4º grau

**Exercício 5.4** Dada a função  $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 8x + 1$ , determine as raízes, Utilizando o método de Newton-Raphson e método da secante, e represente seu gráfico.

**Resolução: 4** Temos:  $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 8x + 1$ , e para encontrarmos as raízes precisamos que  $f(x) = 0$ , logo  $x^4 - 4x^3 - x^2 + 8x + 1 = 0$ . Para facilitar a convergência faremos uma tabela de valores para  $f(x)$  e consideraremos só os sinais, temos:

x	...	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	10	...
f(x)	+	+	+	+	+	+	-	+	+	-	-	+	+	+	+

Figura 5.8

#### 5.4. EXERCÍCIO DE FUNÇÃO POLINOMIAL DO 4º GRAU

Podemos concluir que os intervalos  $I_1 = [-2; -1]$ ,  $I_2 = [-1; 0]$ ,  $I_3 = [1; 2]$  e  $I_4 = [3; 4]$  contém pelo menos um zero de  $f(x)$ .

Para fins desse exercício consideraremos satisfatório um  $\xi$  onde  $f(\xi) = 2 \cdot 10^{-3}$ .

Pelo **método de Newton-Raphson**, conhecendo os resultados acima, Façamos:

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = x_0 - \frac{x_0^4 - 4x_0^3 - x_0^2 + 8x_0 + 2}{4x_0^3 - 12x_0^2 - 2x_0 + 8} = \frac{3x_0^4 - 8x_0^3 - x_0^2 - 1}{4x_0^3 - 12x_0^2 - 2x_0 + 8}$$

como valor inicial pode ser as médias aritméticas dos intervalos  $I$ , ou seja  $x_0 = \frac{-2 - 1}{2} = -1,5$  para o intervalo  $[-2; -1]$ ,  $x_0 = \frac{-1 + 0}{2} = -0,5$  para o intervalo  $[-1; 0]$ ,  $x_0 = \frac{1 + 2}{2} = 1,5$  para o intervalo  $[1; 2]$  e  $x_0 = \frac{3 + 4}{2} = 3,5$  para o intervalo  $[3; 4]$ . vejamos as iterações:

k	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
0	-1,5000	5,313	-0,5000	-2,688	1,5000	2,313	3,5000	-4,688
1	-1,3199	0,932	-0,0114	0,909	1,7721	-0,361	3,6838	1,094
2	-1,2720	0,057	-0,1247	-0,005	1,7391	-0,004	3,6548	0,030
3	-1,2687	0,000	-0,1241	0,000	1,7388	0,000	3,6540	0,000

Figura 5.9

Pelo **método da Secante**, utilizaremos também os intervalos  $I_1 = [-2; -1]$ ,  $I_2 = [-1; 0]$ ,  $I_3 = [1; 2]$  e  $I_4 = [3; 4]$  de  $h(x)$ .

Façamos:

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

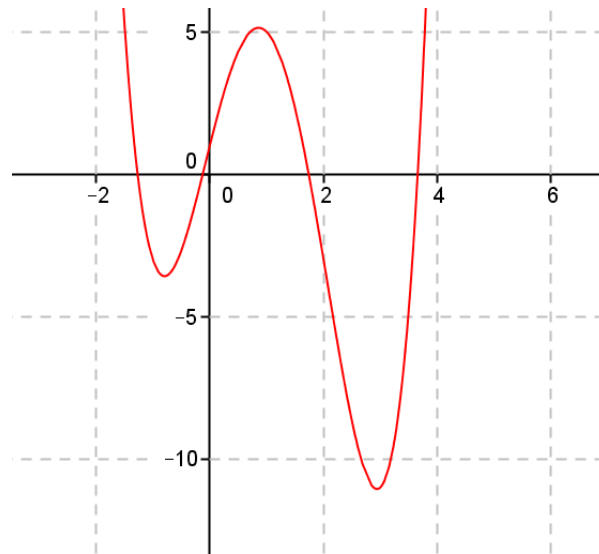
Consideraremos Como valores iniciais  $x_0 = -2$  e  $x_1 = -1$  para o intervalo  $[-2; -1]$ ,  $x_0 = -1$  e  $x_1 = 0$  para o intervalo  $[-1; 0]$ ,  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$  para o intervalo  $[1; 2]$  e  $x_0 = 3$  e  $x_1 = 4$  para o intervalo  $[3; 4]$ . vejamos as iterações:

k	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
0	-2,0000		-1,0000		1,0000		3,0000	
1	-1,0000		0,0000		2,0000		4,0000	
2	-1,0938	-2,2814	-0,2500	-0,9961	1,6250	1,1682	3,3929	-7,0817
3	-1,3914	2,4557	-0,1252	-0,0095	1,7301	0,0926	3,5714	-2,7077
4	-1,2371	-0,5120	-0,1240	0,0002	1,7391	-0,0042	3,6819	1,0223
5	-1,2637	-0,0839	-0,1241	0,0000	1,7388	0,0000	3,6516	-0,0842
6	-1,2689	0,0039					3,6539	-0,0023
7	-1,2687	0,0000					3,6540	0,0000

Figura 5.10

Então a raízes satisfatória de  $f(x)$  são  $x_1 = -1,2687$ ,  $x_2 = -0,1241$ ,  $x_3 = 1,7388$  e  $x_4 = 3,6540$ .

#### 5.4. EXERCÍCIO DE FUNÇÃO POLINOMIAL DO 4º GRAU



**Figura 5.11**

**Exercício 5.5** Dada a função  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 2$ , determine as raízes, utilizando o método de Muller, e represente seu gráfico.

**Resolução: 5** Dado o polinômio  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 2$ , onde os coeficientes são  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = -4$ ,  $d = 0$  e  $e = 2$ . Para facilitar a convergência faremos uma tabela de valores para  $f(x)$  e consideraremos só os sinais, temos:

x	...	-10	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	10	...
f(x)	+	+	+	+	+	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+

**Figura 5.12**

Podemos concluir que os intervalos  $I_1 = [-3; -2]$ ,  $I_2 = [-1; 0]$ ,  $[0; 1]$  e  $I = [2; 3]$  contém pelo menos um zero de  $f(x)$ . Para fins desse exercício consideraremos satisfatório um  $\xi$  onde  $f(\xi) = 2 \cdot 10^{-3}$ .

Façamos:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{2c_i}{b_i \pm \sqrt{b_i^2 - 4a_i c_i}}$$

com

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i = \frac{(x_{i-1} - x_i)(f(x_{i-2}) - f(x_i)) - (x_{i-2} - x_i)(f(x_{i-1}) - f(x_i))}{(x_{i-2} - x_{i-1})(x_{i-2} - x_i)(x_{i-1} - x_i)} \\ b_i = \frac{(x_{i-2} - x_i)^2(f(x_{i-1}) - f(x_i)) - (x_{i-1} - x_i)^2(f(x_{i-2}) - f(x_i))}{(x_{i-2} - x_{i-1})(x_{i-2} - x_i)(x_{i-1} - x_i)} \\ c_i = f(x_i) \end{array} \right.$$

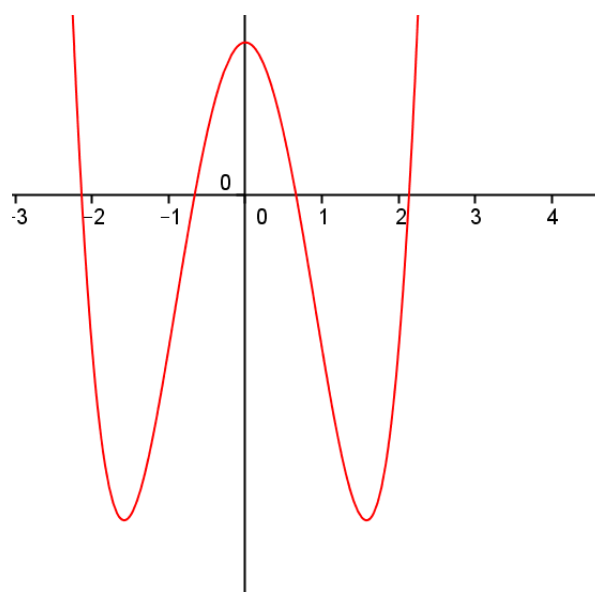
#### 5.4. EXERCÍCIO DE FUNÇÃO POLINOMIAL DO 4º GRAU

Consideraremos como valores iniciais  $x_0 = -4$ ,  $x_1 = -3$  e  $x_2 = -2$  para o intervalo  $[-3; -2]$ ,  $x_0 = -2$ ,  $x_1 = -1$  e  $x_2 = 0$  para o intervalo  $[-1; 0]$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0,5$  e  $x_2 = 1$  para o intervalo  $[0; 1]$  e  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 3$  para o intervalo  $[2; 3]$ . vejamos as iterações:

	x	f(x)	a	b	c		x	f(x)	a	b	c
0	-4,000	178				0	-2,000	-2,000			
1	-3,000	38				1	-1,000	-2,000			
2	-2,000	-2,000	50,0	-10,0	-2,0	2	0,000	2,000	2,0	-6,0	2,0
3	-1,876	-3,208	26,9	6,4	-3,2	3	-0,382	1,292	-3,5	-3,2	1,3
4	-2,122	-0,237	19,0	16,8	-0,2	4	-0,687	-0,136	-4,1	-5,9	-0,1
5	-2,136	0,004	20,1	17,6	0,0	5	-0,664	-0,008	-3,0	-5,5	0,0
6	-2,136	0,000	22,3	17,6	0,0	6	-0,662	0,000	-2,3	-5,5	0,0
	x	f(x)	a	b	c		x	f(x)	a	b	c
0	0,000	2,000				0	1,000	-2,000			
1	0,500	0,813				1	2,000	-2,000			
2	1,000	-2,000	-3,3	7,3	-2,0	2	3,000	38,000	20,0	-60,0	38,0
3	0,678	-0,084	-1,8	5,4	-0,1	3	2,092	-0,735	28,8	-16,4	-0,7
4	0,662	0,002	-1,3	5,5	0,0	4	2,133	-0,044	30,1	-17,8	0,0
5	0,662	0,000	-2,3	5,5	0,0	5	2,136	-0,001	22,0	-17,6	0,0
6	0,662	0,000	-2,4	5,5	0,0	6	2,136	0,000	22,3	-17,6	0,0

**Figura 5.13**

Então as raízes satisfatórias de  $f(x)$  são  $x_1 = -2,136$ ,  $x_2 = -0,662$ ,  $x_3 = 0,662$  e  $x_4 = 2,136$ .



**Figura 5.14**

# Apêndice

## Matriz e Determinante de Vandermonde

Em álgebra linear, uma matriz de Vandermonde, cujo nome faz referência a Alexandre-Théophile Vandermonde, é uma matriz em que os termos de cada linha estão em progressão geométrica.

Uma matriz de Vandermonde de ordem  $m \times n$  tem a forma geral:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \alpha_m^2 & \dots & \alpha_m^{n-1} \end{bmatrix}$$

ou

$$V_{i,j} = \alpha_i^{j-1}$$

para todos os índices  $i$  e  $j$ . Se fizermos a transposta da matriz acima, temos as colunas em progressão geométrica.

O **determinante** de uma matriz de Vandermonde de tamanho  $n \times n$  se expressa da seguinte forma:

$$|V| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Esta fórmula é conhecida por vezes como o discriminante, mas em geral o discriminante é definido como o quadrado da fórmula acima.

Demonstra-se essa fórmula por indução. No caso da matriz  $2 \times 2$  é fácil verificar.

$$|V| = v_{1,1}v_{2,2} - v_{1,2}v_{2,1} = \alpha_2 - \alpha_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Agora, provemos para a matriz  $n \times n$  supondo válido para as matrizes  $(n-1) \times (n-1)$ . Seja  $c_i$  a coluna  $i$ , então multiplicamos a coluna  $c_i$  por  $-\alpha_1$  e somamos com a coluna  $c_{i+1}$  com  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ :

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

Multiplicando por  $-1$  a primeira linha e somando-a as demais linhas, achando assim uma matriz de  $(n-1) \times (n-1)$ , logo:

$$|V| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ 0 & \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3(\alpha_3 - \alpha_1) & \dots & \alpha_3^{n-2}(\alpha_3 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante pelo teorema de Laplace eliminando a primeira linha e a primeira coluna e segue da propriedade que se pode fatorar os coeficientes caindo em uma matriz de Vandermonde  $(n-1) \times (n-1)$ .

$$|V| = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \dots (\alpha_n - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-2} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

E por hipótese de indução temos:

$$|V| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

# Referências Bibliográficas

- [1] IEZZI, Gelson. **Fundamentos da Matemática Elementar** vol 6. São Paulo: Ed. Atual, (2004)
- [2] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico Aspectos Teóricos e Computacionais** - 2 Ed. Makron Books, (1997)
- [3] ZAMBONI, Lincoln César; MONEZZI JUNIOR, Orlando; PAMBOUKIAN, Sergio Vicente Denser. **Métodos Quantitativos e Computacionais**. São Paulo: Páginas e Letras, (2009)
- [4] CHENEY, E. Ward; KINCAID, David R. **Numerical Mathematics and Computing**, 6 Ed. Hardcover: August 3, (2008)
- [5] MUNIZ NETO, Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar-SBM**, vol 8. Rio de Janeiro; SBM, (2012)
- [6] VARGAS, Ivan fernández. **Polinômios-Teoría e práctica-Álgebra**, Lima: Lumbreras, (2010)
- [7] ANDRADE, Bernardino Carneiro de. **A Evolução Histórica de Resolução das Equações do 2o Grau**. Dissertação submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Matemática - Fundamentos e Aplicações, Portugal. Universidade do Porto, (2000).  
<http://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/9895/3/3026-TM-01-P.pdf>.
- [8] BIANCHINI, Edwaldo Matemática. 6 Ed. São Paulo: Moderna,(2006).
- [9] Boyer, Carl Benjamin; Merzbach, Uta C. **História da Matemática**. Trad. Helena de Castro. São Paulo: BLUCHER,(2012).



- [10] EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Trad. Helena Castro. São Paulo: BLUCHER,(2012).
- [11] ATKINSON, K. E. **An Introduction to Numerical Analysis**. New York: Wiley e Sons, (1998).
- [12] STOER, J. e Bulirch, R. **Insistroduction to Numerical Analy**. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [13] RUFINO, Francisco Aldrin Armstrong. **Métodos Algébricos e Geométricos das Equações Polinomiais de grau maior ou igual a dois**. Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. 05/2013, João Pessoa-PB.  
<http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/723>
- [14] LIMA, Elon Lages, **Curso de análise**, vol. I. 13a ed. Rio de Janeiro: AINMPA, (2011)