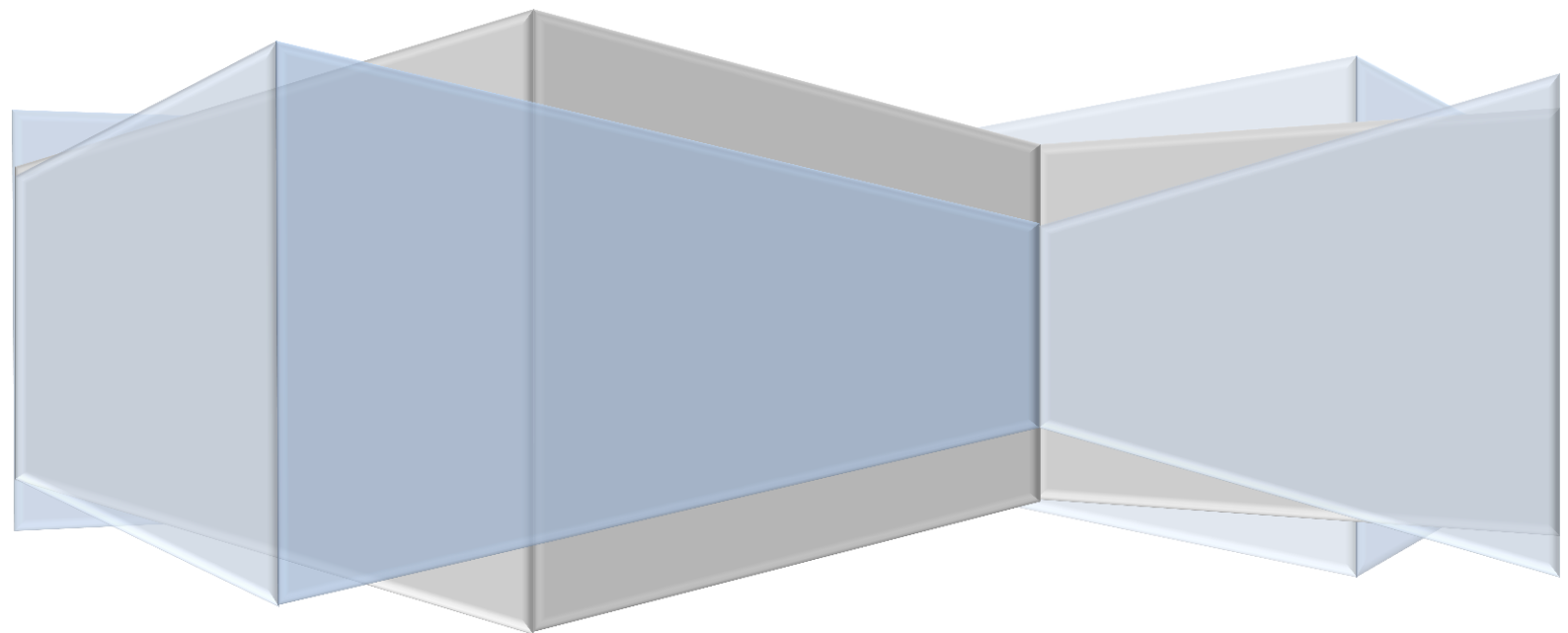


Εξισώσεις 2ου βαθμού

Θεωρία και Ασκήσεις

Γ. Αποστολοπούλου



ΘΕΩΡΙΑ

Εξίσωση 2^{ου} βαθμού είναι η εξίσωση που περιέχει έναν άγνωστο (π.χ τον x) και έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή $ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$.

Αν η εξίσωση δεν είναι στην παραπάνω μορφή, είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε κάποια **προεργασία** για να την φέρουμε στην παραπάνω μορφή και κατόπιν να βρούμε τις λύσεις της.

Η προεργασία είναι η εξής:

- **Να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών** (αν έχει παρονομαστές) πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με το ΕΚΠ των παρονομαστών.
- **Να διώξουμε τις παρενθέσεις** με επιμεριστική.
- **Να κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων** να προσθέσουμε δηλαδή τους όμοιους όρους μεταξύ τους.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να δούμε το βαθμό της εξίσωσης και αν

- Ο άγνωστος δεν είναι υψωμένος σε καμία δύναμη, τότε έχουμε εξίσωση 1^{ου} βαθμού και τη λύνουμε κατά τα γνωστά.
- Η μεγαλύτερη δύναμη του αγνώστου είναι το τετράγωνο, τότε έχουμε εξίσωση 2^{ου} βαθμού και την λύνουμε ως εξής:
 1. Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος ώστε η εξίσωση να πάρει τη μορφή $ax^2+bx+c=0$
 2. Προσδιορίζουμε ποιοι αριθμοί παίζουν το ρόλο των a, b, c ($a = 0$ συντελεστής του x^2 , $b = 0$ συντελεστής του x , $c = 0$ σταθερός όρος).
 3. Υπολογίζουμε τον αριθμό Δ που λέγεται **Διακρίνουσα** από τον τύπο **$\Delta = b^2 - 4ac$** .
 4. Από το είδος του αριθμού Δ εξαρτάται πόσες λύσεις θα έχει η εξίσωση. Δηλαδή
 - Αν η **Διακρίνουσα Δ είναι αρνητικός αριθμός**, τότε η εξίσωση δεν έχει λύσεις (**αδύνατη**)
 - Αν η **Διακρίνουσα Δ είναι θετικός αριθμός**, τότε η εξίσωση έχει **δύο λύσεις διαφορετικές** μεταξύ τους που τις υπολογίζουμε από τους τύπους
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
 - Αν η **Διακρίνουσα Δ είναι ίση με το 0**, τότε η εξίσωση έχει δυο ίσες λύσεις (ή **μια διπλή λύση**) που την υπολογίζουμε από τον τύπο $x = \frac{-b}{2a}$

Ακολουθούν ασκήσεις και προβλήματα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $4x^2 - 5x = 0$

ii. $3x^2 = 27$

iii. $x^2 + 4 = 0$

iv. $x^2 = -x$

v. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{25}{9} = 0$

vi. $\frac{x^2}{3} + 1 = 0$

vii. $\frac{x^2}{4} - 0,25x = 0$

viii. $x^2 + \frac{1}{2}x = 0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $(x + 3)(x - 2)(x + 4) = 0$

ii. $(x^2 + 1)x(x^2 - 4) = 0$

iii. $(x^2 - x)(2x^2 - 8) = 0$

iv. $(x - 1)(x - 2) = x(x - 1)(x + 3)$

v. $x^2(x + 5) = 3(x + 5)(x + 2)$

vi. $x(x^2 + 1) = x^2 + 1$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $5(x^2 + 1) - 11x = 4(x^2 - 3) - 1$

ii. $(3x - 5)(2x - 5) = (x + 1)^2 - 4$

iii. $(3y + 4)^2 = 12(y + 1)$

v. $(x + 1)^2 = 20 - (x - 1)^2$

vi. $2x(2x - 1) + (x + 3)(x - 3) + 2 = 0$

vii. $(2x + 3)^2 + (x + 2)^2 = (3x - 1)^2$

viii. $(3x + 7)^2 - 9x = (7x - 2)(5x + 3) - 5(x^2 + 1)$

ix. $(x^2 - 12x + 11)(2x^2 + 7x - 15) = 0$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $\frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} = 0$

ii. $\frac{5}{3}x^2 + \frac{x}{2} - 3 = 0$

iii. $\frac{x^2 - 3x}{3} + \frac{x^2 - x + 5}{6} = \frac{1}{2}$

iv. $\frac{x^2}{2} + \frac{2x^2 - 6x + 1}{10} = \frac{4x^2 + 2}{20} - x$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ο Βαγγέλης είναι 4 χρόνια μεγαλύτερος από την αδελφή του Μαρία. Αν η ηλικία του Βαγγέλη πολλαπλασιαστεί με την ηλικία της Μαρίας, δίνει γινόμενο την ηλικία της μητέρας τους, που είναι τετραπλάσια από την ηλικία του Βαγγέλη. Να βρείτε πόσο χρονών είναι ο καθένας.
2. Μια βιοτεχνία θρανίων για να κατασκευάσει x θρανία ξοδεύει $\frac{1}{20}x^2 + 10x + 300$ ευρώ. Αν η βιοτεχνία πουλάει το κάθε θρανίο 30 ευρώ, πόσα θρανία πρέπει να κατασκευάσει για να κερδίσει 1700 ευρώ;
3. Σε ένα τουρνουά βόλεϊ κάθε ομάδα δίνει 2 αγώνες με καθεμία από τις υπόλοιπες. Αν έγιναν συνολικά 182 αγώνες, πόσες ομάδες έλαβαν μέρος στο τουρνουά;
4. Ένα εργαστήριο ζαχαροπλαστικής παρασκευάζει ταψάκια με γαλακτομπούρεκο. Υπολογίστηκε ότι η παρασκευή x ταψιών την ημέρα κοστίζει $8x + 75$ ευρώ. Η τιμή πώλησης κάθε ταψιού είναι $38 - x$ ευρώ. Πόσα ταψάκια την ημέρα πρέπει να κατασκευάσει το εργαστήριο ώστε να έχει κέρδος 150 ευρώ;
5. Το κόστος παραγωγής x εξαρτημάτων ενός υπολογιστή είναι $\frac{x^2}{2} + 38x + 100$ ευρώ. Η τιμή πώλησης κάθε εξαρτήματος καθορίζεται από την ποσότητα παραγωγής και είναι $x + 13$ ευρώ. Να βρείτε πόσα εξαρτήματα πρέπει να παράγονται για να έχουμε κέρδος 200 ευρώ.
6. Αγόρασε κάποιος ένα τετραγωνικό οικοπέδο προς 400 ευρώ το m^2 και έδωσε για την περιφραγή του 50 ευρώ το m . Έτσι πλήρωσε συνολικά 93000 ευρώ. Να βρείτε το εμβαδόν του οικοπέδου.