

Problemas – Tema 1

Problemas resueltos - 7 - inecuaciones de una incógnita

1. Resuelve $\frac{-6x+9}{4} > \frac{-x+5}{2}$.

Aplico común denominador en ambos miembros.

$$\begin{aligned}\frac{-6x+9}{4} &> 2 \cdot \frac{(-x+5)}{4} \\ -6x+9 &> -2x+10 \\ -6x+2x &> 10-9 \\ -4x &> 1 \\ x &< \frac{-1}{4}\end{aligned}$$

Solución: $\left(-\infty, \frac{-1}{4}\right)$

2. Resuelve $\frac{x}{3} - \frac{5x-2}{2} \leq x - \frac{2-5x}{6}$.

Aplico común denominador.

$$\begin{aligned}\frac{2x}{6} - \frac{3 \cdot (5x-2)}{6} &\leq \frac{6x}{6} - \frac{2-5x}{6} \\ 2x-3 \cdot (5x-2) &\leq 6x - (2-5x) \\ 2x-15x+6 &\leq 6x-2+5x \\ 2x-15x-6x-5x &\leq -2-6 \\ -24x &\leq -8 \\ x &\geq \frac{8}{24} \\ x &\geq \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Solución: $\left[\frac{1}{3}, \infty \right)$

3. Resuelve $\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+1}{x-1}$

Unificamos en una sola fracción.

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{x+1}{x-1} \rightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} < 0 \rightarrow \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{x^2-1} < 0 \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1} < 0$$

Raíz del numerador $\rightarrow x=0$

Raíces del denominador $\rightarrow x=\pm 1$

Evaluamos la fracción en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -1) \rightarrow x=-10 \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1} > 0 \rightarrow \text{No cumple la desigualdad}$$

$$(-1, 0) \rightarrow x=-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1} < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la desigualdad}$$

$$(0, 1) \rightarrow x=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1} > 0 \rightarrow \text{No cumple la desigualdad}$$

$$(1, +\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow \frac{-4x}{x^2-1} < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la desigualdad}$$

Solución final: $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

4. Resuelve $\left\{ \begin{array}{l} 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ \frac{1}{x-2} + 1 \leq \frac{3}{4-x^2} \end{array} \right\}.$

Estudiamos la primera inecuación $\rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 \leq 0$

Por Ruffini obtenemos sus raíces $\rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 = 6(x - \frac{1}{3})(x - 1)(x + 2)(x + \frac{1}{2})$

Evaluamos el polinomio en los siguientes intervalos:

$(-\infty, -2) \rightarrow x = -10 \rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 > 0 \rightarrow$ No cumple la desigualdad

$(-2, -\frac{1}{2}) \rightarrow x = -1 \rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 < 0 \rightarrow$ Sí cumple la desigualdad

$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) \rightarrow x = 0 \rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 > 0 \rightarrow$ No cumple la desigualdad

$(\frac{1}{3}, 1) \rightarrow x = \frac{2}{3} \rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 < 0 \rightarrow$ Sí cumple la desigualdad

$(1, +\infty) \rightarrow x = 10 \rightarrow 6x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 3x + 2 > 0 \rightarrow$ No cumple la desigualdad

Solución de la primera inecuación $\rightarrow [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{3}, 1]$

Estudiamos la segunda inecuación:

$$\frac{1}{x-2} + 1 \leq \frac{3}{4-x^2} \rightarrow \text{unificamos en una única fracción} \rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{(x-2)(x+2)}$$

Raíces del numerador $\rightarrow$ no hay solución real

Raíces del denominador $\rightarrow x = \pm 2$

Evaluamos el cociente en los siguientes intervalos:

$(-\infty, -2) \rightarrow x = -10 \rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{(x-2)(x+2)} > 0 \rightarrow$ No cumple la desigualdad

$(-2, 2) \rightarrow x = 0 \rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{(x-2)(x+2)} < 0 \rightarrow$ Sí cumple la desigualdad

$(2, \infty) \rightarrow x = 10 \rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{(x-2)(x+2)} > 0 \rightarrow$ No cumple la desigualdad

La solución de la segunda inecuación es el intervalo: $(-2, 2)$

La solución final del sistema será la intersección de las soluciones particulares.

$$\text{Solución final} \rightarrow (-2, \frac{-1}{2}] \cup [\frac{1}{3}, 1]$$

5. Resuelve $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{x-2} - \frac{x}{2+x} \leq \frac{-7}{4-x^2} \\ x^2 > 1 \end{array} \right\} .$

Resolvemos cada inecuación por separado, y luego haremos la intersección de las soluciones individuales.

$$\frac{2}{x-2} - \frac{x}{2+x} \leq \frac{-7}{4-x^2} \rightarrow \frac{2}{x-2} - \frac{x}{2+x} + \frac{7}{4-x^2} \leq 0$$

$$4-x^2 = (2-x)(2+x) = -(x-2)(x+2)$$

$$\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x+2} - \frac{7}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$

Unificamos en una sola fracción.

$$\frac{2(x+2) - x(x-2) - 7}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \rightarrow \frac{2x+4-x^2+2x-7}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \rightarrow \frac{-x^2+4x-3}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$

Raíces del numerador $\rightarrow -x^2+4x-3=0 \rightarrow x=1, x=3$

Raíces del denominador $\rightarrow (x+2)(x-2)=0 \rightarrow x=2, x=-2$

Evaluamos el signo de la fracción de la inecuación en los siguientes intervalos. Ojo con la factorización del numerador $-x^2+4x-3=-(x-1)(x-3) \therefore$

$$(-\infty, -2) \rightarrow x=-10 \rightarrow \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)} < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la inecuación}$$

$$(-2, 1) \rightarrow x=0 \rightarrow \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)} > 0 \rightarrow \text{No cumple la inecuación}$$

$$(1, 2) \rightarrow x=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)} < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la inecuación}$$

$$(2, 3) \rightarrow x=\frac{5}{2} \rightarrow \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)} > 0 \rightarrow \text{No cumple la inecuación}$$

$$(3, +\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow \frac{-(x-1)(x-3)}{(x-2)(x+2)} < 0 \rightarrow \text{Sí cumple la inecuación}$$

La solución particular de la primera inecuación es $(-\infty, -2) \cup [1, 2) \cup [3, +\infty)$.

Estudiamos la segunda inecuación.

$$x^2 > 1 \rightarrow x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Raíces } x = \pm 1$$

Evaluamos en los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -1) \rightarrow x = -10 \rightarrow x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Sí cumple la inecuación}$$

$$(-1, 1) \rightarrow x = 0 \rightarrow x^2 - 1 < 0 \rightarrow \text{No cumple la inecuación}$$

$$(1, +\infty) \rightarrow x = 10 \rightarrow x^2 - 1 > 0 \rightarrow \text{Sí cumple la inecuación}$$

La solución particular de la segunda inecuación es $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

La solución final del sistema es la intersección de las dos soluciones particulares. Es decir:

$$(-\infty, -2) \cup (1, 2) \cup [3, +\infty)$$

6. Resuelve.

$$\frac{-3x^2+6x-3}{x^2-9} < 0$$

Obtenemos las raíces del numerador $\rightarrow -3x^2+6x-3=0 \rightarrow -x^2+2x-1=0$

$$x^2-2x+1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow \text{raíz doble.}$$

Obtenemos las raíces del denominador $\rightarrow x^2-9=0 \rightarrow x=-3, x=3$.

Estudiamos el signo de la fracción en los siguientes intervalos:

$$f(x) = \frac{-3(x-1)^2}{(x+3)(x-3)}$$

$$(-\infty, -3) \rightarrow f(-10) < 0 \rightarrow \text{intervalo solución}$$

$$(-3, 1) \rightarrow f(0) > 0$$

$$(1, 3) \rightarrow f(2) > 0$$

$$(3, \infty) \rightarrow f(10) < 0 \rightarrow \text{intervalo solución}$$

La solución será la unión de los intervalos donde $f(x) = \frac{-3(x-1)^2}{(x+3)(x-3)} < 0$.

Es decir: $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

7. Halla un número entero y positivo que sumado con 11, resulte mayor que el triple de él, disminuido en 7, y que sumado con 5 sea menor que el doble de él, disminuido en 2.

El número que buscamos es x , entero y positivo. Traducimos a ecuaciones cada una de las frases del enunciado.

$$x+11>3x-7 \rightarrow 18>2x \rightarrow 9>x$$

$$x+5<2x-2 \rightarrow 7<x$$

Ambas condiciones solo se cumplen para el número entero 8 .