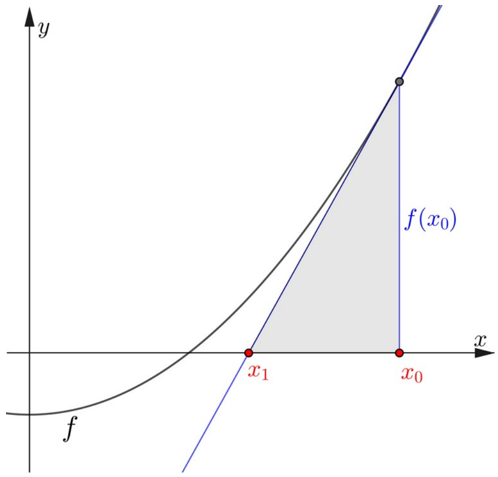
Newton-Verfahren



Iterations-Formel:

$$x_{x+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Herleitung:

Der Zeichnung oben rechts ist das Steigungs-Dreieck zu entnehmen:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

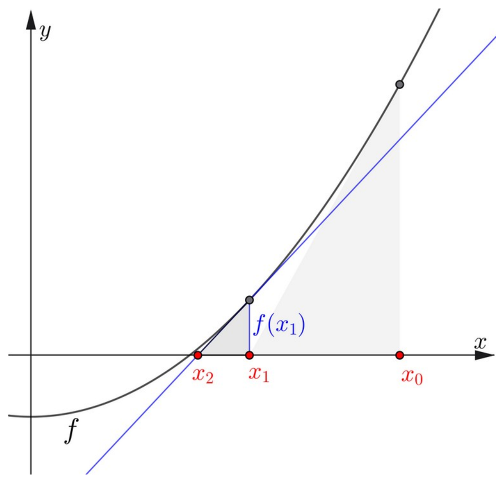
Auflösen nach x_1:

$$f'(x_0) \cdot (x_0 - x_1) = f(x_0)$$

$$x_0 - x_1 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$-x_1 = -x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



Der Zeichnung rechts entnimmt man, dass x_2 entsprechend gebildet wird:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Allemein ergibt sich jede neue Stelle x_{n+1} entsprechend aus ihrer Vorgängerin x_n:

Siehe obige Iterations-Formel ✓

Beispiel:

$f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$, Startwert $x_0 = 2$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
0	2	2	4
1	1.5	0.25	3
2	1.4166666667	0.0069444444	2.8333333333
3	1.4142156863	0.0000060073	2.8284313725
4	1.4142135624	0	2.8284271247
5	1.4142135624	0	2.8284271247

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2^2-2}{2 \cdot 2} = 2 - \frac{2}{4} = 1{,}5$$

$$x_2 = 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$$

$$x_3 = 1{,}41\overline{6} - \frac{0{,}0069\overline{4}}{2{,}8\overline{3}} \approx 1{,}4142156863$$

$$x_4 \approx 1{,}4142156863 - \frac{0{,}0000060073}{2{,}8284313725} \approx 1{,}4142135624 \approx \sqrt{2}$$

Weitere Schritte bringen keine Verbesserung der Nullstellen-Genauigkeit, der Funktionswert ist Null im Rahmen der technischen Rechengenauigkeit.