

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía, la mala presentación y no explicar adecuadamente las operaciones pueden restar hasta un máximo de 1 punto de la nota final.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- a) [1,5 puntos] Una firma de alta perfumería pretende sacar al mercado un frasco de un perfume exclusivo que contenga 12 mL de esencia pura más una cantidad variable x de alcohol.

El precio de la esencia pura es de 48 euros el mililitro. Al añadir alcohol a la esencia, el precio de la mezcla resultante disminuye. Sabiendo que por cada mililitro de alcohol añadido el precio del mililitro de mezcla se reduce 3 euros, se pide determinar el valor de x para el que se obtiene el frasco de perfume (mezcla) de precio máximo. Indicar en ese caso el precio resultante.

b) [1 punto] Utiliza el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle para demostrar que la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y la gráfica de la función $g(x) = 5x - 2$ se cortan una sola vez en el intervalo $(0, \pi)$.

Ejercicio 2.- a) [1 punto] Sea la función $f(x) = 2 \cos(x) + |x - 1|$. Obtener la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = \pi$.

b) [1,5 puntos] Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right]^{\frac{1}{\cos(x)}}$$

Ejercicio 3.- a) [1,5 puntos] En un centro escolar el 80% de los alumnos practica algún deporte. El 25% toca un instrumento musical. El 15% realiza ambas actividades. Calcula la probabilidad de que un alumno elegido al azar no realice ninguna de las actividades.

b) [1 punto] Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral. Sabemos que $p(A) = 0.5$, $p(B) = 0.4$ y que la probabilidad de unión de ambos sucesos es 0.8. Determinar $p(A/B)$.

Ejercicio 4.- a) [1 punto] Lanzamos dos dados de seis caras y sumamos sus puntuaciones. Hallar la probabilidad de que la suma sea igual a 11.

b) [1,5 puntos] Una cooperativa envasa zumos de naranja, zumos de piñas y zumos de melocotón en botellas de 1 litro y de 2 litros. Se sabe que el 60% de las botellas son de zumo de naranja y el 30% de piña. Además, el 80% de las botellas de zumo de naranja y el 70% de los zumos de piña son de 2 litros, mientras que el 60% de las botellas de melocotón son botellas de 1 litro.

Se elige al azar una botella envasada por la cooperativa.

Calcula la probabilidad de que la botella elegida al azar sea de 2 litros.

Opción B

Ejercicio 1.- a) [1,5 puntos] Sea la función:

$$f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$$

Con ayuda del estudio del crecimiento de la función, con ayuda de la detección de los extremos relativos y con ayuda del Teorema de Bolzano, justifica de manera razonada cuántas veces corta la gráfica de la función al eje horizontal.

b) [1 punto] Sean las funciones $f(x) = 2x^4 + ax^2 + b$ y $g(x) = -2x^3 + c$.

Obtener los parámetros a , b y c para que las gráficas de ambas funciones se corten en el punto $P(1,1)$ y para que en dicho punto coincida la pendiente de las rectas tangentes a ambas funciones.

Ejercicio 2.- a) [1 punto] Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, determina la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$. Determina si la curva de la función queda por encima o por debajo de dicha recta tangente.

b) [1,5 puntos] Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2e^{x-1}}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}$$

Ejercicio 3.- a) [1,5 puntos] En una clase hay 15 chicos y 14 chicas. Se eligen dos alumnos al azar. ¿Qué probabilidad hay de que los dos alumnos elegidos sean chicas?

b) [1 punto] Se sabe que las probabilidades de dos sucesos A y B son $P(A) = 0,5$ y $P(B) = 0,7$. También se sabe que la probabilidad de su intersección es 0,3. ¿Cuánto vale la probabilidad de la unión?

Ejercicio 4.- El 65% de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75% de los turistas que se hospedan en la capital y el 15% de los que se hospedan en zonas rurales lo hace en hoteles, mientras que el resto lo hace en apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en la provincia.

a) [1,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) [1 punto] Si se sabe que el turista se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?