Selbsteinschätzung:

Entscheiden Sie, wie sicher Sie sich in Bezug auf die folgenden Kompetenzen einschätzen.

1. Ich kann die mittlere Änderungsrate berechnen.	○ sicher	○ unsicher
2. Ich kann die lokale Steigung eines Graphen mittels einer Tangente abschätzen.	○ sicher	○ unsicher
3. Ich kann die Steigung eines Graphen in verschiedenen Punkten beschreiben und erkennen, ob die Steigung negativ, positiv oder gleich Null ist.	○ sicher	○ unsicher
4. Ich kann aus dem Funktionsgraphen von f Aussagen über Eigenschaften der Ableitungsfunktion f' treffen.	○ sicher	○ unsicher
5. Ich kann zu einem gegebenen Graphen von f den Graphen der Ableitungsfunktion f' skizzieren.	○ sicher	○ unsicher
6. Ich kann anschaulich erklären, wie die Steigung in einem Punkt auf einer Kurve mit Hilfe von Sekanten und Tangente bestimmt werden kann.	○ sicher	○ unsicher
7. Ich kann die Steigung in einem Punkt als Grenzwert der Sekantensteigungen berechnen.	○ sicher	○ unsicher
8. Ich kann die Ableitungsfunktion einer ganzrationalen Funktion berechnen.	○ sicher	○ unsicher

Ein ausführliches Video zur Grundidee des Differenzierens finden Sie hier (In dem Video werden auch Aspekte vorgestellt, die erst später in Qualifikationsphase besprochen werden.) : **https://www.youtube.com/watch?v=EW89UcvybVc**

Zusammenfassung:

Tangente
Eine Tangente ist eine Gerade, die eine Kurve in einem bestimmten Punkt berührt. Tangente und Kurve haben in diesem Punkt dieselbe Steigung.

Steigung der Tangente

Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion f im Punkt P(x|f(x)) wird mit folgendem Verfahren bestimmt:

1. Man bestimmt die Steigung der Sekante durch den Punkt P und den Punkt Q(x+h|f(x+h)) des Graphen mit Hilfe des Differenzenquotienten: $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2. Man lässt den Punkt Q auf den Punkt P zuwandern, indem h immer kleiner wird.

3. Die Steigung der Tangente im Punkt P ist dann der Grenzwert der Sekantensteigungen und wird auch Differentialquotient genannt: $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Dieser Grenzwert wird Ableitung der Funktion f an der Stelle x genannt und wird mit f'(x) bezeichnet. Er gibt die Steigung des Graphen der Funktion f an dieser Stelle x an.
Den Vorgang nennt man **Ableiten** oder **Differenzieren** einer Funktion.

Ableitungsfunktion
Die Ableitungsfunktion ordnet jeder Stelle x die Ableitung der Funktion f an dieser Stelle zu und wird mit f'(x) bezeichnet.

Graphisches Ableiten / Graphisches Differenzieren
Bei der graphischen Ermittlung des Graphen der Ableitungsfunktion skizziert man ausgehend von markanten Punkten wie Extrem- oder Wendepunkten und dem Monotonieverhalten den ungefähren Verlauf der Ableitungsfunktion (beachten Sie die NEW Regel).
Dabei gibt es folgende wichtige Zusammenhänge:

Eigenschaften von f	Bedeutung für den Graphen von f '	zugehörige Bedingungen
Extremstelle	an der Extremstelle von f hat f' eine Nullstelle	f'(x) = 0
Wendestelle	an der Wendestelle von f hat f' ein Extremum	f''(x) = 0, da Extremum von f´ (s.o.)
f ist streng monoton fallend über [a;b]	Funktionswerte von f' liegen im Intervall [a;b] unterhalb der x-Achse	f'(x) < 0 für alle x aus [a;b]
f ist streng monoton steigend über [a;b]	Funktionswerte von f' liegen im Intervall [a;b] oberhalb der x-Achse	f'(x) > 0 für alle x aus [a;b]

Zur rechnerischen Bestimmung der Ableitungsfunktion nutzt man die folgenden **Ableitungsregeln**:
Potenzregel
Eine Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$ für eine natürliche (oder auch rationale) Zahl n hat die Ableitung $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
D.h. der Exponent n wird als Faktor vorgezogen („fällt vor die Füße“) und der Exponent um 1 vermindert.

Faktorregel
Eine Potenzfunktion f mit $f(x) = c \cdot x^n$ hat die Ableitung $f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$.
D.h. der Exponent wird mit dem Faktor c vor der Potenz multipliziert und der Exponent um 1 vermindert.
Die Faktorregel gilt nicht nur für Potenzfunktionen, sondern allgemein für jede beliebige Funktion g: Eine Funktion f mit $f(x) = c \cdot g(x)$ hat die Ableitung: $f'(x) = c \cdot g'(x)$
D.h. steht vor dem Funktionsterm ein Faktor, dann wird dieser Faktor beim Ableiten beibehalten.

Summenregel
Wenn eine Funktion u die Ableitung u' hat und eine Funktion v die Ableitung v', dann hat die Funktion f mit $f(x) = u(x) + v(x)$ die Ableitung $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
D.h. sind zwei oder mehr Funktionen durch "+" oder auch "–" verbunden, werden die jeweiligen Funktionen einzeln abgeleitet und anschließend addiert bzw. subtrahiert.
Konstanten fallen weg, da sie den Exponenten 0 besitzen (konstante Funktionen haben die Steigung 0).

Ableitungen in Anwendungszusammenhängen

Zuordnung der Ausgangsfunktion f	Bedeutung der Sekantensteigung	Bedeutung der Ableitungsfunktion f'
Entfernung -> Höhe (Berg)	durchschnittliche Steigung	lokale Steigung
Zeit -> zurückgelegter Weg	durchschnittliche Geschwindigkeit	momentane Geschwindigkeit
Zeit -> Geschwindigkeit	durchschnittliche Beschleunigung	momentane Beschleunigung
Zeit -> Zufluss (zufließende Wassermenge)	durchschnittliche Zuflussgeschwindigkeit	momentane Zuflussgeschwindigkeit

Normale
Eine Normale ist eine Gerade, die in einem bestimmten Punkt des Graphen von f senkrecht auf der Tangente, also senkrecht auf dem Graphen von f steht: $n(x) = m_n x + b_n$
Es gilt: $\mathbf{m_n = -1/m_f}$ (m_f ist die Steigung der Tangente = Steigung des Graphen von f in einem bestimmten Punkt = Ableitung der Funktion f an dieser Stelle)

Steigungswinkel
Für die Beziehung zwischen Steigung m und Steigungswinkel α gilt: $m = \tan \alpha$.

Steigungswinkel α einer Geraden bei positiver Steigung: $\alpha = \tan^{-1}(m)$
Steigungswinkel α einer Geraden bei negativer Steigung: $\alpha = 180° + \tan^{-1}(m)$.