

Problemas – Tema 1

Problemas resueltos - 4 - parábolas

1. Escribe la ecuación de una parábola sabiendo que pasa por los puntos $(0,4)$, $(3,-2)$ y $(5,4)$. Representarla.

La ecuación general de una parábola es $\rightarrow y = ax^2 + bx + c$

Si los puntos que nos dan pertenecen a la parábola podemos sustituirlos en la ecuación. Entonces tendremos:

$$4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$-2 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$$

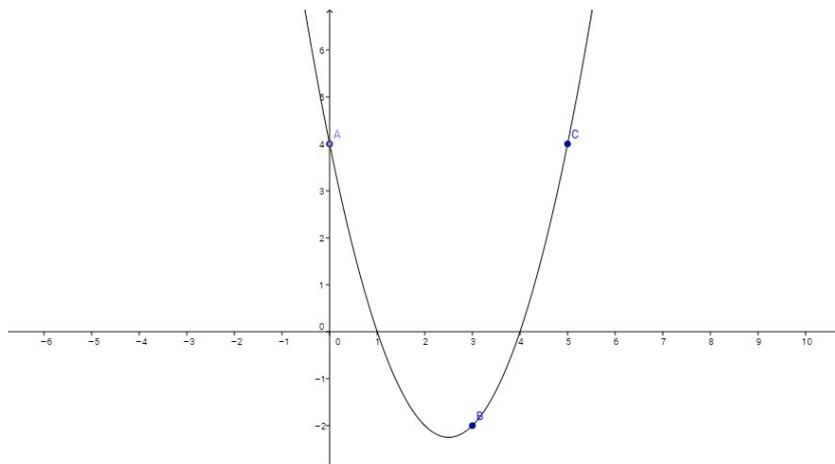
$$4 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c$$

Tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas. De la primera ecuación nos queda $c = 4$. Las otras dos las resolvemos mediante un sistema de ecuaciones por método de reducción.

$$\begin{pmatrix} -2 = 9a + 3b + 4 \\ 4 = 25a + 5b + 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{aplicamos reducción} \rightarrow \begin{array}{l} (-6 = 9a + 3b) \cdot (-5) \\ (0 = 25a + 5b) \cdot 3 \\ \hline 30 = 30a \\ a = 1 \end{array}$$

Con los valores $a = 1$, $c = 4$, obtenemos finalmente $b = -5$.

Por lo tanto la ecuación de la parábola es $\rightarrow y = x^2 - 5x + 4$



2. Encontrar la ecuación de la parábola que pase por el punto (1,2) y cuyo vértice sea el punto (7,0).

La ecuación general de la parábola es $y = ax^2 + bx + c$.

Si pasa por el punto (1,2) $\rightarrow 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \rightarrow 2 = a + b + c$

También pasa por el punto (7,0) $\rightarrow 0 = a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c \rightarrow 0 = 49a + 7b + c$

Si el vértice aparece en el punto (7,0) podemos utilizar la relación para la variable horizontal del vértice:

$$x_{\text{vértice}} = \frac{-b}{2a} \rightarrow 7 = \frac{-b}{2a} \rightarrow -14a = b \rightarrow \text{Llevamos esta relación a las dos primeras ecuaciones:}$$

$$2 = a + b + c \rightarrow 2 = a - 14a + c \rightarrow 2 = -13a + c$$

$$0 = 49a + 7b + c \rightarrow 0 = 49a + 7(-14a) + c \rightarrow 0 = -49a + c$$

Planteamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2 = -13a + c \\ 0 = -49a + c \end{cases}$$

Aplicamos método de reducción, restando ambas ecuaciones (primera menos segunda).

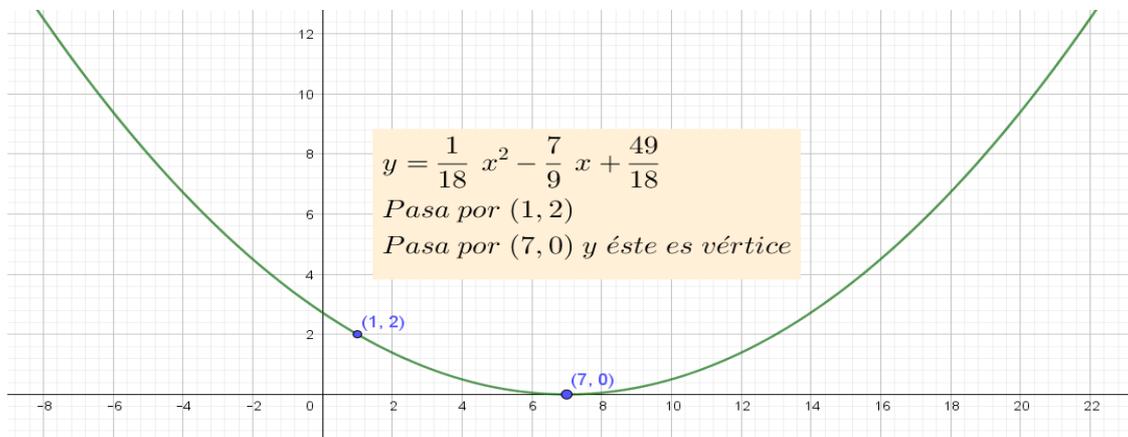
$$2 = 36a \rightarrow a = \frac{1}{18}$$

Sabiendo que $-14a = b \rightarrow b = \frac{-14}{18} = \frac{-7}{9}$

Y con la ecuación $0 = -49a + c \rightarrow 0 = -49 \cdot \frac{1}{18} + c \rightarrow c = \frac{49}{18}$

La ecuación de la parábola solución es:

$$y = \frac{1}{18}x^2 - \frac{7}{9}x + \frac{49}{18}$$



3. Obtener los puntos de corte de las parábolas $f(x)=2x^2-4$ y $g(x)=-x^2+8$.

Para obtener los puntos de corte de dos funciones siempre tenemos que igualar sus respectivas ecuaciones.

$$f(x)=g(x) \rightarrow 2x^2-4=-x^2+8 \rightarrow 3x^2=12 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2$$

Una vez obtenido el valor de la variable horizontal de los puntos de corte, obtenemos su correspondiente imagen. Podemos sustituir en cualquiera de las dos funciones, ya que ambas coinciden en los puntos de corte.

Si $x=2 \rightarrow g(2)=-2^2+8=4 \rightarrow$ punto $(2,4)$

Si $x=-2 \rightarrow g(-2)=-(-2)^2+8=4 \rightarrow$ punto $(-2,4)$

