3. La parabola e la retta

TEORIA a p. 250

Posizione reciproca tra retta e parabola

Per ciascuna delle parabole di cui è data l'equazione, stabilisci se la retta r di equazione indicata è secante, tangente o esterna alla parabola. Se è secante, determina le coordinate dei punti di intersezione; se è tangente, determina le coordinate del punto di contatto.

101 $y = x^2 - 4$ $\quad r: y = -2x + 4$ [Secante; (2, 0), (−4, 12)]

102 $y = x^2 - 2x + 1$ $\quad r: y = -x + 1$ [Secante; (0, 1), (1, 0)]

103 $y = x^2 + 6x + 9$ $\quad r: y = 0$ [Tangente; $(-3, 0)$]

104 $y = x^2 - 5x + 1$ $\quad r: x = -2$ [Secante; $(-2, 15)$]

105 $y = \frac{1}{2}x^2$ $\quad r: y = 2x - 2$ [Tangente; $(2, 2)$]

106 $y = \frac{1}{3}x^2 - x$ $\quad r: y = -x + 3$ [Secante; $(3, 0)$, $(-3, 6)$]

107 $y = -x^2 - \frac{1}{2}x$ $\quad r: y = -\frac{1}{2}x + 2$ [Esterna]

108 $y = x^2 - 4x$ $\quad r: y = -x + \frac{1}{2}$ $\left[\text{Secante; } \left(\frac{3+\sqrt{11}}{2}, \frac{-2-\sqrt{11}}{2}\right), \left(\frac{3-\sqrt{11}}{2}, \frac{-2+\sqrt{11}}{2}\right)\right]$

109 $y = x^2 - 4x + 3$ $\quad r: y = 2x - 1$ [Secante; $(3-\sqrt{5}, 5-2\sqrt{5})$, $(3+\sqrt{5}, 5+2\sqrt{5})$]

110 $y = -2x^2$ $\quad r: y = x - 3$ $\left[\text{Secante; } (1, -2), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)\right]$

111 $y = x^2$ $\quad r: y = 3x - 3$ [Esterna]

112 **Corda staccata da una retta su una parabola.** Se una retta è secante rispetto a una parabola, si dice *corda staccata dalla retta sulla parabola* il segmento che ha come estremi i punti di intersezione della retta con la parabola. Determina la misura della corda staccata dalla retta di equazione $y = 2x + 3$ sulla parabola di equazione $y = x^2$. [$4\sqrt{5}$]

113 Considera la parabola di equazione $y = -x^2 + 4x$ e indica con V il suo vertice. Determina la misura della corda staccata sulla parabola dalla retta passante per V e parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. [$\sqrt{2}$]

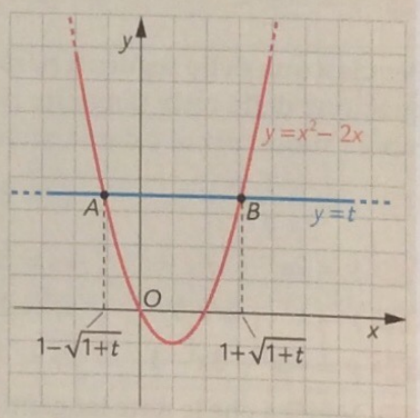
114 Data la parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 3$, indica con V il suo vertice. Determina quindi la misura della corda staccata sulla parabola dalla retta passante per V e perpendicolare alla retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x$. [$2\sqrt{5}$]

115 **ESERCIZIO SVOLTO**

Determiniamo la retta parallela all'asse x che stacca sulla parabola di equazione $y = x^2 - 2x$ una corda di misura 4.

Una generica retta parallela all'asse x ha equazione $y = t$, con $t \in \mathbf{R}$.
Poniamo a sistema l'equazione della retta e della parabola:

$$\begin{cases} y = t \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$



L'equazione risolvente è $x^2 - 2x - t = 0$. La retta risulterà *secante* la parabola se il discriminante di questa equazione è maggiore di 0, cioè per $t > -1$.
In tal caso, risolvendo il sistema si trova che i due punti di intersezione tra la retta e la parabola sono:

$$A(1 - \sqrt{1+t}, t) \quad \text{e} \quad B(1 + \sqrt{1+t}, t)$$

Poiché $\overline{AB} = 2\sqrt{t+1}$, affinché sia $\overline{AB} = 4$ deve essere verificata l'equazione $2\sqrt{t+1} = 4$, da cui $t = 3$. Pertanto la retta cercata ha equazione $y = 3$.

116 Determina la retta parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante che stacca sulla parabola di equazione $y = x^2 - x + 3$ una corda di misura $2\sqrt{6}$. [$y = -x + 6$]

117 Determina una retta parallela all'asse x che stacca sulle parabole di equazioni $y = x^2 + 1$ e $y = 4(x-2)^2$ due corde congruenti. $\left[y = \frac{4}{3}\right]$

118 ESERCIZIO SVOLTO

Determiniamo per quali valori di k la retta di equazione $y = 2x + k$ ha almeno un punto in comune con la parabola di equazione $y = x^2 - 1$.

Impostiamo il sistema formato dall'equazione della parabola e della retta:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 2x + k \end{cases}$$

La sua equazione risolvente è $x^2 - 2x - 1 - k = 0$, che ha come discriminante $\Delta = 8 + 4k$. Affinché la retta abbia almeno un punto in comune con la parabola, deve essere $\Delta \geq 0$, cioè $k \geq -2$.

119 Determina per quali valori di k la retta di equazione $y = x + k$ è esterna alla parabola di equazione $y = x^2 - x$. $[k < -1]$

120 Determina per quali valori di k la retta di equazione $y = 2x + k$ è secante rispetto alla parabola di equazione $y = 3x^2 - x$. $\left[k > -\frac{3}{4}\right]$

121 Determina per quali valori di k la retta di equazione $y = x + k$ è esterna alla parabola di equazione $y = 2x^2 - x$. $\left[k < -\frac{1}{2}\right]$

122 Determina k in modo che la retta di equazione $y = x + k$ risulti secante rispetto alla parabola di equazione $y = x^2 - 3x$ ed esterna alla parabola di equazione $y = x^2 + 2$. $\left[-4 < k < \frac{7}{4}\right]$

123 Determina k in modo che la retta di equazione $y = x + k$ incontri in almeno un punto sia la parabola di equazione $y = -x^2 + x$, sia la parabola di equazione $y = x^2 + 3x - 9$. $[-10 \leq k \leq 0]$

Rette tangenti a una parabola

Per ciascuna parabola di cui è data l'equazione, determina le equazioni delle rette tangenti alla parabola, passanti per il punto P indicato.

124 $y = x^2 - 4$ $\quad P(2, -4)$ $\quad [y = -4,\ y = 8x - 20]$

125 $y = x^2 - 2x + 1$ $\quad P(-1, -1)$ $\quad [y = x(2\sqrt{5} - 4) + 2\sqrt{5} - 5,\ y = -x(2\sqrt{5} + 4) - 2\sqrt{5} - 5]$

126 $y = -x^2 + 3x$ $\quad P(0, 1)$ $\quad [y = x + 1,\ y = 5x + 1]$

127 $y = x^2 - 5x + 1$ $\quad P(3, -6)$ $\quad [y = -x - 3,\ y = 3x - 15]$

128 $y = -\frac{1}{2}x^2$ $\quad P(2, 0)$ $\quad [y = 0,\ y = -4x + 8]$

Per ciascuna delle seguenti parabole, determina l'equazione della retta tangente nel punto P della parabola stessa, di cui è data l'ascissa.

129 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3x$ $\quad x_P = 3$ $\quad [y = x + 3]$

130 $y = 2x^2 - 4x$ $\quad x_P = 3$ $\quad [y = 8x - 18]$

131 $y = x^2 - 4x + 7$ $\quad x_P = 2$ $\quad [y = 3]$

132 $y = -x^2 - 3x - 1$ $\quad x_P = -1$ $\quad [y = -x]$

133 Verifica che le rette tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 2x$ che passano per il punto $P\left(0, -\frac{5}{4}\right)$ sono perpendicolari.

134 Determina le equazioni delle rette tangenti alla parabola di equazione $y = -x^2 + 3x$ nei suoi punti di intersezione A e B con l'asse x (con $x_A < x_B$). Indica con C il punto di intersezione di tali tangenti e calcola l'area del triangolo ABC.

$\left[y = 3x,\ y = -3(x - 3);\ C\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right);\ \frac{27}{4}\right]$

135 Determina le rette tangenti alla parabola di equazione $y = x^2 - 3x + 2$ nei suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani e l'area del triangolo individuato da tali rette.

$\left[y = -3x + 2,\ y = -x + 1,\ y = x - 2;\ \text{Area} = \frac{1}{2}\right]$

136 **Normale.** Si dice *normale* a una curva in un punto P la perpendicolare in P alla retta tangente alla curva in P. Determina la normale alla parabola di equazione $y = x^2 - 3x + 3$ nel suo punto di intersezione con l'asse y.

$\left[y = \frac{1}{3}x + 3\right]$

137 Determina le equazioni delle normali alla parabola di equazione $y = 3x^2 - x - 2$ nei suoi punti di intersezione con l'asse x.

$\left[y = \frac{1}{5}x + \frac{2}{15},\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}\right]$