Ableitungsregel für zusammengesetzte Funktionen

in Summenform

Test mit Applet führt zu einer Vermutung:

$$\textit{Funktion } f \textit{ mit } f(x) = \boxed{x^4 + x^3}$$

$$\textit{Erste Ableitung der Funktion } f \textit{ an der Stelle } x_0:$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \boxed{4\, x_0^3 + 3\, x_0^2}$$

Satz - Summenregel

Sind zwei Funktionen u und v in x_0 differenzierbar, so ist an dieser Stelle auch die Summenfunktion s mit $s(x) = u(x) + v(x)$ differenzierbar.

Es gilt: $s'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$.

Beweis:

Es seien u und v zwei in x_0 differenzierbare Funktionen und es sei s die Summe der Funktionen u und v mit $s(x) = u(x) + v(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir berechnen den Differenzenquotienten von s an der Stelle x_0:

$$d(x) = \frac{s(x) - s(x_0)}{x - x_0} = \frac{[u(x) + v(x)] - [u(x_0) + v(x_0)]}{x - x_0}$$

$$= \frac{u(x) - u(x_0) + v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{(jeweils } x \neq x_0\text{)}$$

Mithilfe der bekannten Grenzwertsätze ergibt sich

$$\lim_{x \to x_0} d(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \quad \text{und damit } s'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0). \qquad \text{w.z.b.w.}$$