Cálculo vectorial

Ejercicios unidad 13.6 - Derivadas direccionales y gradientes.

En los ejercicios 1-12, hallar la derivada direccional de la función en P en dirección de v.

7) $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $P(3,4)$, $v = 3i - 4j$

$D_{\vec{u}} g(x,y) = \nabla g \cdot \vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\langle 3,-4\rangle}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{\langle 3,-4\rangle}{\sqrt{25}} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{-4}{5} \right\rangle$$

$$\nabla g(x,y) = \langle g_x, g_y \rangle = \left\langle \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right\rangle$$

$$\nabla g(3,4) = \left\langle \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}, \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} \right\rangle = \langle 3/5, 4/5 \rangle$$

$$D_{\vec{u}} g(3,4) = \nabla g(3,4) \cdot \vec{u}$$

$$= \langle 3/5, 4/5 \rangle \cdot \langle 3/5, -4/5 \rangle$$

$$= 9/25 - 16/25 = \boxed{\frac{-7}{25}}$$

11) $h(x,y,z) = xyz$, $P(2,1,1)$, $v = \langle 2,1,2 \rangle$

$D_{\vec{u}} h(x,y,z) = \nabla h(x,y,z) \cdot \vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\langle 2,1,2 \rangle}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{\langle 2,1,2 \rangle}{3} = \left\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$$

$\nabla h(x,y,z) = \langle h_x, h_y, h_z \rangle$

$= \langle yz, xz, xy \rangle$

$\nabla h(2,1,1) = \langle (1)(1), (2)(1), (2)(1) \rangle$

$= \langle 1,2,2 \rangle$

$D_{\vec{u}} h(2,1,1) = \nabla h(2,1,1) \cdot \vec{u}$

$= \langle 1,2,2 \rangle \cdot \langle 2/3, 1/3, 2/3 \rangle$

$= 2/3 + 2/3 + 4/3$

$= 8/3$

Hallar la derivada direccional de la función en dirección de $u = \cos\theta\, i + \operatorname{sen}\theta\, J$

13) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\theta = \pi/4$

$\vec{u} = \langle \cos \pi/4, \operatorname{sen} \pi/4 \rangle = \langle \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \rangle$

$D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}$

$\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle$

$= \langle 2x, 2y \rangle$

$D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}$

$= \langle 2x, 2y \rangle \cdot \langle \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 \rangle$

$= \sqrt{2}x + y\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}(x+y)$

En los ejercicios 17 a 20, hallar la derivada direccional de la función en P en dirección de Q

17) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 \quad P(1,1),\ Q(4,5)$

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 3,4 \rangle \ ; \ \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\langle 3,4 \rangle}{\sqrt{3^2+4^2}} = \langle 3/5, 4/5 \rangle$$

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle$$
$$= \langle 2x, 6y \rangle$$

$$\nabla f(1,1) = \langle 2(1), 6(1) \rangle = \langle 2,6 \rangle$$

$$D_{\vec{u}} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \vec{u}$$
$$= \langle 2,6 \rangle \cdot \langle 3/5, 4/5 \rangle$$
$$= 6/5 + 24/5$$
$$= 30/5$$
$$= \boxed{6}$$

En los ejercicios 21 a 26, hallar el gradiante de la función en el Punto dado.

21) $f(x,y) = 3x + 5y^2 + 1 \quad (2,1)$

$\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle$

$= \langle 3, 10y \rangle$

$\nabla f(2,1) = \langle 3, 10(1) \rangle$

$= \langle 3, 10 \rangle$

$= 3i + 10j$

25) $w = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2, \quad (1,1,-2)$

$\nabla w(x,y,z) = \langle w_x, w_y, w_z \rangle$

$= \langle 6x, -10y, 4z \rangle$

$\nabla w(1,1,-2) = \langle 6(1), -10(1), 4(-2) \rangle$

$= \langle 6, -10, -8 \rangle$

$= 6i - 10j - 8k$

Hallar el gradiente de la función y el valor máximo de la derivada direccional en el punto dado.

39) $w = xy^2z^2 \qquad P(2,1,1)$

$\nabla w(x,y,z) = \langle w_x, w_y, w_z \rangle$

$= \langle y^2z^2, 2xyz^2, 2xy^2z \rangle$

$= yz(yz + 2xz + 2xy)$

$= yz(yz\,i + 2xz\,j + 2xy\,k)$

$\nabla w(2,1,1) = \langle (1)^2(1)^2, 2(2)(1)(1)^2, 2(2)(1)^2(1) \rangle$

$= \langle 1, 4, 4 \rangle$

$\|\nabla w(x,y,z)\|$ → el valor máximo

$\|\nabla w(2,1,1)\| = \sqrt{1^2+4^2+4^2}$

$= \sqrt{1+16+16}$

$= \sqrt{33}$

En los ejercicios 44 a 46, utilizar la función $f(x,y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$

44) Hallar $\nabla f(x,y)$

$\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle$

$= \langle -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \rangle$

45) Hallar el valor máximo de la derivada direccional en $(3,2)$.

$\nabla f(3,2) = \langle -1/3, -1/2 \rangle$

$\|\nabla f(3,2)\| = \sqrt{(-1/3)^2 + (-1/2)^2}$

$= \sqrt{1/9 + 1/4}$

$= \sqrt{13/36}$

$= \boxed{\frac{\sqrt{13}}{6}}$

En los ejercicios 51 a 54, hallar un vector normal a la curva de nivel $f(x,y) = c$ en P.

51) $f(x,y) = 6 - 2x - 3y$

$c = 6, \quad P(0,0)$

$6 - 2x - 3y = 6$

$-2x - 3y = 0$

$\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle$

$= \langle -2, -3 \rangle$

$\nabla f(0,0) = \langle -2, -3 \rangle$

$= \langle -2, -3 \rangle$

$= -2i - 3j$

En los ejercicios 55 a 58, a) encontrar el gradiente de la función en P.
b) encontrar un vector normal unitario para la curva de nivel $f(x,y)=c$ en P
c) encontrar la recta tangente a la curva de nivel $f(x,y)=c$ en P.
d) Trazar la curva de nivel, el vector unitario normal y la recta tangente en el plano xy.

57) $f(x,y) = 3x^2-2y^2$
$c=1$, $P(1,1)$

a) $\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle$
$= \langle 6x, -4y \rangle$

$\nabla f(1,1) = \langle 6(1), -4(1) \rangle$
$= \langle 6, -4 \rangle$

b) $3x^2-2y^2=1$
$\nabla f(x,y) = \langle 6x, -4y \rangle$
$\nabla f(1,1) = \langle 6, -4 \rangle$
$= 6i - 4j = 3i - 2j$

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\langle 3,-2 \rangle}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \langle 3,-2 \rangle \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{13} \langle 3,-2 \rangle$$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

c) $m = \frac{dy}{dx} = \frac{-fx}{fy}$

$m = \frac{-fx}{fy} = \frac{-6x}{-4y}$

$m = \frac{-fx}{fy}\Big|_{(1,1)} = \frac{-6x}{-4y}\Big|_{(1,1)} = \frac{-6(1)}{-4(1)} = \frac{-6}{-4} = \boxed{\frac{3}{2}}$

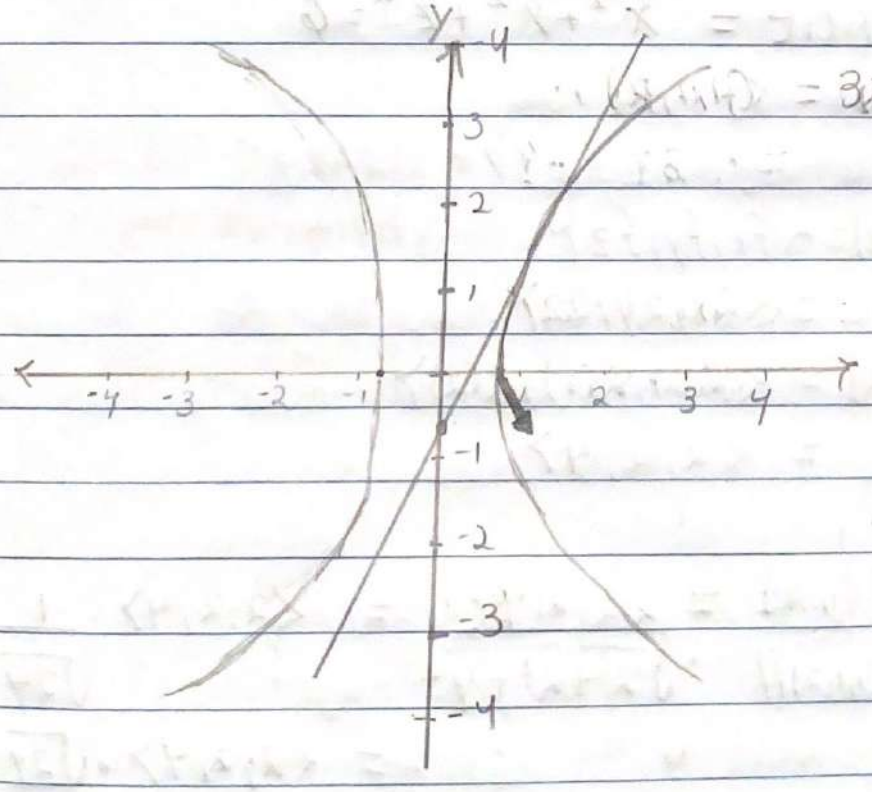
$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 1$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

d)



$3x^2 - 3y^2 = 1$

$\left\langle \frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{-2\sqrt{13}}{13} \right\rangle$

$\langle 0.83, -0.55 \rangle$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

$x = 1, y = 1$

$x = 0, y = -\frac{1}{2}$