Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 8 - determinantes y Teorema de Rouché-Frobenius

1. Dado el sistema de ecuaciones $f(x)=\begin{Bmatrix} 4x+ay-2z=-1 \\ x+y-az=-1 \\ x+y+(2a+2)z=6-a \end{Bmatrix}$

a) Estudiar las posibles soluciones según el valor de a **.**

b) Resolver para todos los casos en que el sistema sea compatible.

a) Planteamos la matriz ampliada del sistema.

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz A y de la matriz ampliada A/C para poder aplicar las consecuencias del teorema de Rouché-Frobenius.

Hacemos el determinante de la matriz A .

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & a & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix} \rightarrow C'_1=C_1-C_2 \rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 4-a & a & -2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 1 & 2a+2 \end{vmatrix}$$

$$|A|=(4-a)(2a+2)+a(4-a)=(4-a)(3a+2)$$

Anulamos el determinante para conocer los valores de a que lo hacen 0.

$$|A|=0 \rightarrow (4-a)(3a+2)=0 \rightarrow a=4 \ , \ a=\frac{-2}{3}$$

Discusión de casos:

- Si $a\neq 4$ y $a\neq\frac{-2}{3}$ $\rightarrow$ $rango(A)=rango(A/C)=3=número \ de \ incógnitas$ → Solución única → **Sistema Compatible Determinado**.

- Si $a=4 \rightarrow A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 10 & 2 \end{array}\right)$ → Estudiamos el rango de la matriz A . Encontramos al menos un menor de orden 2 no nulo → $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-14\neq 0 \rightarrow rango(A)=2$. En la matriz ampliada A/C estudiamos los menores de orden 3 → $|C_2 C_3 C_4| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $|C_1 C_3 C_4| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $|C_1 C_2 C_4| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ → Todos los menores de orden 3 son nulos. Por lo tanto $rango(A) = rango(A/C) = 2 < 3 = número\ de\ incógnitas$ → Infinitas soluciones → **Sistema Compatible Indeterminado con un parámetro libre**.

- Si $a = \frac{-2}{3}$ → $A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & \frac{-2}{3} & -2 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{20}{3} \end{array}\right)$ → El rango de la matriz A es 2 porque encontramos al menos un menor de orden 2 no nulo: $\begin{vmatrix} 4 & \frac{-2}{3} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{14}{3} \neq 0$. En la matriz ampliada A/C estudiamos los menores de orden 3 →

  $|C_1 C_2 C_4| = \begin{vmatrix} 4 & \frac{-2}{3} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{20}{3} \end{vmatrix} = \frac{80}{3} + \frac{2}{3} - 1 - (-1 - 4 - \frac{40}{9}) = \frac{325}{9} \neq 0$ → El rango de la matriz ampliada es 3 → $rango(A) = 2 \neq 3 = rango(A/C)$ → No existe solución → **Sistema Incompatible**.

b) Resolvemos en primer lugar en los casos SCD aplicando la regla de Cramer.

Si $a \neq 4$ y $a \neq \frac{-2}{3}$ → SCD → $A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array}\right)$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & a & -2 \\ -1 & 1 & -a \\ 6-a & 1 & 2a+2 \end{vmatrix}}{(4-a)(3a+2)} = \frac{-a^3 + 8a^2 - 3a + 12}{(4-a)(3a+2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -a \\ 1 & 6-a & 2a+2 \end{vmatrix}}{(4-a)(3a+2)} = \frac{-4a^2 + 17a - 24}{(4-a)(3a+2)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}4 & a & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 6-a\end{vmatrix}}{(4-a)(3a+2)}=\frac{a^2-11a+24}{(4-a)(3a+2)}=\frac{(a-3)(a-8)}{(4-a)(3a+2)}$$

Finalmente resolvemos el caso de SCI, con un parámetro libre.

Si $a=4 \rightarrow A/C=\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 4 & -2 & -1\\ 1 & 1 & -4 & -1\\ 1 & 1 & 10 & 2\end{array}\right) \rightarrow F'_2=4F_2-F_1 \quad , \quad F'_3=4F_3-F_1$

$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 4 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -14 & -3\\ 0 & 0 & 42 & 9\end{array}\right)$ → Las filas segunda y tercera son proporcionales: podemos obviar una.

$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 4 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -14 & -3\end{array}\right)$ → de la segunda ecuación despejamos: $z=\frac{3}{14}$

En la primera ecuación nos queda → $4x+4y-2\left(\frac{3}{14}\right)=-1 \rightarrow 4x+4y=-1+\frac{3}{7}$

$4x+4y=\frac{-4}{7} \rightarrow x+y=\frac{-1}{7}$ → considero $x=\lambda\in\mathbb{R}$ como parámetro libre → $y=\frac{-1}{7}-\lambda$

2. Dado el sistema $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ a\,x+2\,y+3\,z=0 \\ a^2\,x+4\,y+9\,z=-12 \end{array}\right\}$

a) Estudiar la compatibilidad del sistema según el parámetro real a **.**

b) Resolver, si es posible, para $a=3$ **.**

a) Escribimos la matriz del sistema y la matriz ampliada.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 3 \\ a^2 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad , \quad M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & 2 & 3 & 0 \\ a^2 & 4 & 9 & -12 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz del sistema, calculando su determinante e igualándolo a 0 .

$$|M|=18+3\,a^2+4\,a-(2\,a^2+12+9\,a)=a^2-5\,a+6=0 \;\rightarrow\; a=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$$

$$a=2 \quad , \quad a=3$$

Discusión de casos mediante el Teorema de Rouché-Frobenius:

Si $a\neq 2$ y $a\neq 3$ $\rightarrow$ $rango(M)=3=rango(M/D)=número\ de\ incógnitas$ → Solución única → Sistema compatible determinado.

Si $a=2$ $\rightarrow$ $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad , \quad M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 9 & -12 \end{array}\right)$

El rango de M es 2 , ya que encontramos al menos un menor de orden 2 no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{22}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}=9-4=5\neq 0$.

Estudiamos el rango de M/D , evaluando los determinantes de orden 3 que contiene. Por ejemplo:

$$|C_2\,C_3\,C_4|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & -12 \end{vmatrix}=-36+0+36-(24+0-24)=0$$

$|C_1\,C_3\,C_4|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & -12 \end{vmatrix}=0$ → Es nulo por coincidir con el determinante antes calculado.

$|C_1 C_2 C_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -12 \end{vmatrix} = 0$ → Es nulo por tener dos columnas iguales $C_1 = C_2$.

Por lo tanto el rango de M/D es igual a 2, ya que ningún determinante de orden 3 contenidos en la matriz ampliada es distinto de 0.

Es decir $rango(M) = rango(M/D) = 2 < 3 = número\ de\ incógnitas$ → Infinitas soluciones → Sistema Compatible Indeterminado con un parámetro libre (3 – 2 = 1 parámetro).

Si $a=3$ → $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $M/D = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 9 & -12 \end{array}\right)$

El rango de M es 2 , ya que encontramos al menos un menor de orden 2 no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$.

Estudiamos el rango de M/D , evaluando los determinantes de orden 3 que contiene. Por ejemplo:

$|C_2 C_3 C_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & -12 \end{vmatrix} = -36 + 0 + 36 - (24 + 0 - 24) = 0$

$|C_1 C_3 C_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 9 & 9 & -12 \end{vmatrix} = 0$ → Es nulo por tener dos columnas iguales $C_1 = C_2$.

$|C_1 C_2 C_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & -12 \end{vmatrix} = 0$ → Es nulo por coincidir con el primer determinante calculado, intercambiando el orden de las dos primeras columnas.

Por lo tanto el rango de M/D es igual a 2, ya que ningún determinante de orden 3 contenidos en la matriz ampliada es distinto de 0.

Es decir $rango(M) = rango(M/D) = 2 < 3 = número\ de\ incógnitas$ → Infinitas soluciones → Sistema Compatible Indeterminado con un parámetro libre (3 – 2 = 1 parámetro).

b) Si $a=3$ → $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $M/D = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 9 & -12 \end{array}\right)$

En el apartado anterior demostramos que para $a=3$ tenemos SCI con un parámetro libre. Tomamos, por ejemplo, $z = \lambda$ como parámetro y reducimos nuestro sistema a dos ecuaciones y dos incógnitas.

$\begin{Bmatrix} x+y=2-\lambda \\ 3x+2y=-3\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} 3x+3y=6-3\lambda \\ 3x+2y=-3\lambda \end{Bmatrix}$ → Restamos → $y=6$

Llevamos este resultado a una de las dos ecuaciones del sistema.

$x+6=2-\lambda \rightarrow x=-4-\lambda$

Las infinitas soluciones de nuestro SCI resultan:

$x=-4-\lambda$

$y=6$

$z=\lambda$

3. Considera el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} \lambda x+y-z=-1 \\ \lambda x+\lambda z=\lambda \\ x+y-\lambda z=0 \end{matrix}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores de λ **.**

b) Resuelve el sistema para $\lambda=0$ **.**

a) La matriz del sistema y la matriz ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad , \quad A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

Por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema tendrá solución si el rango de ambas matrices coincide. En caso contrario, será incompatible.

Si ambos rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas del sistema (tres en nuestro caso), la solución será única y estaremos ante un sistema compatible determinado.

Si ambos rangos coinciden y su valor es menor que le número de incógnitas, estaremos ante infinitas soluciones y el sistema será compatible indeterminado (con tantos parámetros libres como la diferencia entre el número de incógnitas y el rango).

Para estudiar el rango de la matriz A , calculamos su determinante.

$$|A|=0+\lambda-\lambda-(0+\lambda^2-\lambda^2)=0$$

El determinante de A se anula independientemente del valor del parámetro λ . Por lo tanto, el rango de A nunca será 3 . Como máximo, podrá ser 2 .

El rango de A será 2 si existe al menos un menor de orden 2 no nulo. Si estudiamos todos los menores de orden dos posibles:

$$|\alpha_{11}|=-\lambda \quad , \quad |\alpha_{12}|=-\lambda^2-\lambda=-\lambda(\lambda+1) \quad , \quad |\alpha_{13}|=\lambda$$

$$|\alpha_{21}|=-\lambda+1 \quad , \quad |\alpha_{22}|=-\lambda^2+1=(1+\lambda)(1-\lambda) \quad , \quad |\alpha_{23}|=\lambda-1$$

$$|\alpha_{31}|=\lambda \quad , \quad |\alpha_{32}|=\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1) \quad , \quad |\alpha_{33}|=-\lambda$$

Viendo estos nueve menores de orden dos, no hay ningún valor único del parámetro λ que anule a todos. Por lo tanto, el rango de A será 2 independientemente del valor del parámetro λ .

Ahora estudiamos el rango de la matriz ampliada A/C . Como máximo su rango será 3 , ya que es un matriz rectangular de tres filas y cuatro columnas.

En primer lugar comprobamos si A/C contiene alguna submatriz cuadrada de orden tres con determinante no nulo.

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

$$|C_1 C_2 C_4|=\lambda(2+\lambda) \quad , \quad |C_1 C_2 C_4|=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=0 \quad , \quad \lambda=-2$$

$$|C_1 C_3 C_4|=\lambda^2(1-\lambda) \quad , \quad |C_1 C_3 C_4|=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=0 \quad , \quad \lambda=1$$

$$|C_2 C_3 C_4|=\lambda^2 \quad , \quad |C_2 C_3 C_4|=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=0$$

Si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq -2$ → $rango(A/C)=3\neq 2=rango(A)$ → Sistema incompatible → No existe solución.

Si $\lambda=-2$ → $|C_2 C_3 C_4|=\lambda^2=4\neq 0$ → $rango(A/C)=3\neq 2=rango(A)$ → Sistema incompatible → No existe solución.

Si $\lambda=1$ → $|C_2 C_3 C_4|=\lambda^2=1\neq 0$ → $rango(A/C)=3\neq 2=rango(A)$ → Sistema incompatible → No existe solución.

Si $\lambda=0$ → $rango(A/C)\neq 3$ por anularse el determinante de todas las submatrices de orden tres → $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Encontramos al menos un menor de orden dos no nulo → $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ → $rango(A/C)=2=rango(A)<3=número\ de\ incógnitas$ → Sistema compatible indeterminado → Infinitas soluciones con $3-2=1$ parámetro libre.

b) Debemos resolver el sistema para $\lambda=0$, donde ya sabemos (por el apartado anterior), que estamos ante un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones) con un parámetro libre.

$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Podemos obviar la segunda fila por tener todos los términos nulos →

$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Tomamos como parámetro libre $y=\alpha$

De la primera ecuación del nuevo sistema → $z=1+\alpha$

De la segunda ecuación del nuevo sistema → $x=\alpha$

La solución final, en función de un parámetro, resulta: $\left\{\begin{array}{c} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{array}\right\}$

4. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{Bmatrix} k\,x+2\,y=3 \\ -x+2\,k\,z=-1 \\ 3\,x-y-7\,z=k+1 \end{Bmatrix}$

a) Estudiar las posibles soluciones según el valor de k **.**

b) Resolver para $k=1$ **.**

a) Tenemos la siguiente matriz del sistema y su matriz ampliada asociada.

$$A=\begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2k \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \quad , \quad A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} k & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2k & -1 \\ 3 & -1 & -7 & k+1 \end{array}\right)$$

El sistema tendrá solución siempre y cuando el rango de ambas matrices coincida, según el teorema de Rouché-Frobenius.

Para estudiar el rango de la matriz A vemos para que valores de k se anula su determinante.

$$|A|=2k^2+12k-14 \quad , \quad |A|=0 \;\rightarrow\; k^2+6k-7=0 \;\rightarrow\; k=1,-7$$

Discusión de casos:

Si $k\neq 1,-7 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rango(A)=3=rango(A/C)=número\ de\ incógnitas$ → Estamos ante un sistema compatible determinado → Solución única.

Si $k=-7 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rango(A)\neq 3$ → Estudiemos el rango de A y de A/C .

$A=\begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -14 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ → $rango(A)=2$ por existir al menos un menor de orden dos no nulo; por ejemplo $\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0$. Estudiamos rango de la matriz ampliada $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -14 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & -6 \end{array}\right)$ comprobando si existe al menos un menor de orden tres no nulo. En efecto, $|C_1 C_2 C_4|=13\neq 0 \Rightarrow rango(A/C)=3\neq 2=rango(A)$ → Sistema incompatible → No hay solución.

Si $k=1 \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow rango(A)\neq 3$ → Estudiemos el rango de A y de A/C .

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ → $rango(A)=2$ por existir al menos un menor de orden dos no nulo; por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Estudiamos rango de la matriz ampliada $A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & 2 \end{array}\right)$ comprobando si existe al menos un menor de orden tres no nulo. Todos los menores de orden tres se anulan: $|C_1 C_2 C_4| = 0$, $|C_1 C_3 C_4| = 0$, $|C_2 C_3 C_4| = 0$ → $rango(A) = 2 = rango(A/C) < 3 = número\ de\ incógnitas$ → Sistema compatible indeterminado con un parámetro libre → Infinitas soluciones.

b) Para $k=1$ hemos justificado en el apartado anterior que estamos ante un sistema compatible indeterminado con un parámetro libre → Infinitas soluciones. Por ejemplo, si consideramos $z=\lambda$ como parámetro libre:

$\left\{\begin{array}{c} x+2y=3 \\ -x+2z=-1 \\ 3x-y-7z=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+2y=3 \\ -x=-1-2\lambda \\ 3x-y=2+7\lambda \end{array}\right\}$ → De la segunda ecuación obtenemos $x=1+2\lambda$. Y llevando este resultado a la primera ecuación $y=1-\lambda$.

La solución de nuestro sistema, dependiente de un parámetro, resulta $\left\{\begin{array}{c} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$.

5. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{matrix}(3\alpha-1)x+2y=5-\alpha \\ \alpha x+y=2 \\ 3\alpha x+3y=\alpha+5\end{matrix}\right\}$

a) Discútelo según los valores del parámetro α .

b) Resuélvelo para $\alpha=1$ y determina en dicho caso, si existe, alguna solución donde $x=4$.

a) La matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema resultan:

$$A=\begin{pmatrix}3\alpha-1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3\end{pmatrix} \quad , \quad A/C=\left(\begin{array}{cc|c}3\alpha-1 & 2 & 5-\alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha+5\end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de A . Al ser una matriz rectangular de tres filas y dos columnas, el valor máximo de su rango podrá ser dos. Los tres menores de orden dos de la matriz de coeficientes resultan:

$$\begin{vmatrix}3\alpha-1 & 2 \\ \alpha & 1\end{vmatrix}=3\alpha-1-2\alpha=\alpha-1$$

$$\begin{vmatrix}3\alpha-1 & 2 \\ 3\alpha & 3\end{vmatrix}=9\alpha-3-6\alpha=3\alpha-3=3(\alpha-1)$$

$$\begin{vmatrix}\alpha & 1 \\ 3\alpha & 3\end{vmatrix}=3\alpha-3\alpha=0$$

Discusión de casos:

- Si $\alpha\neq 1$ → existe en A al menos un menor de orden dos no nulo → $rango(A)=2$ → Estudiamos el rango de la matriz ampliada A/C , que como máximo será tres.

  Antes de hacer el determinante de A/C , aplicamos transformaciones lineales para simplificar las operaciones.

  $$A/C=\left(\begin{array}{cc|c}3\alpha-1 & 2 & 5-\alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha+5\end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3-3F_2 \rightarrow A/C=\left(\begin{array}{cc|c}3\alpha-1 & 2 & 5-\alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-1\end{array}\right)$$

  $$|A/C|=(3\alpha-1)(\alpha-1)+0+0-(0+0+2\alpha(\alpha-1))=(\alpha-1)(3\alpha-1-2\alpha)=(\alpha-1)^2$$

  Como $\alpha\neq 1$ → $|A/C|\neq 0$ → $rango(A/C)=3\neq 2=rango(A)$ → Por el Teorema de Rouché-Frobenius no existe solución al no coincidir los rangos → Sistema Incompatible.

- Si $\alpha=1 \rightarrow rango(A)=1$ al anularse todos los menores de orden dos de A y existir al menos un menor de ordeno uno no nulo. La matriz ampliada queda:

$$A/C=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

Las filas de esta matriz ampliada cumplen las siguientes relaciones: $F_1=2F_1$ y $F_3=F_1+F_2$ → Por lo tanto solo existe una fila (vector) linealmente independiente → El rango de la matriz ampliada es igual a $1 \rightarrow rango(A/C)=1=rango(A)<2=número\,incógnitas$ → Por el Teorema de Rouché-Frobenius estamos ante un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad.

b) Para $\alpha=1$ tenemos un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad. Nuestras tres ecuaciones con dos incógnitas pueden quedar reducidas a una única ecuación, ya que como hemos deducido en el apartado anterior las dos primeras filas son proporcionales entre sí, y la tercera fila es combinación lineal de la dos primeras.

Si nos quedamos, por ejemplo, con la segunda ecuación:

$x+y=2$ → Llamando $y=\lambda$ como parámetro libre → $x=2-\lambda$

Si $\lambda=-2 \rightarrow x=4$ → La solución general que pide el enunciado resulta $x=4$, $y=-2$

6. Sea el sistema $\left\{\begin{matrix} 2x+y+az=-1 \\ -x+ay-z=2 \\ 2ax-2y+a^2z=2 \end{matrix}\right\}$

a) Discute las soluciones del siguiente sistema según los valores del parámetro a **.**

b) Resolverlo cuando sea compatible determinado.

a) Vamos a definir la matriz del sistema A y la matriz ampliada A/C , de tal forma que, según el Teorema de Rouché-Frobenius, si el rango de ambas matrices coincide el sistema será compatible. En caso contrario, el sistema será incompatible y no tendrá solución.

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{pmatrix}$ → El rango máximo que puede tener A es 3

$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & -1 \\ -1 & a & -1 & 2 \\ 2a & -2 & a^2 & 2 \end{array}\right)$ → El rango máximo que puede tener A/C es 3

El rango de A será 3 si el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por lo tanto, calculamos su determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{vmatrix}=2a^3-2a+2a-(2a^3+4-a^2)=a^2-4$$

$$|A|\neq 0 \quad \rightarrow \quad a^2-4\neq 0 \quad \rightarrow \quad a^2\neq 4 \quad \rightarrow \quad a\neq\pm 2$$

Nuestra discusión de casos es el siguiente:

- Si $a\neq\pm 2$ → $rango(A)=3$ → $rango(A/C)=3$. Como $n=3$ es el número de incógnitas del sistema, y coincide con $rango(A)=rango(A/C)$, según el Teorema de Rouché-Frobenius tendremos sistema compatible determinado (solución única).
- Si $a=2$ → $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ → Sabemos que su determinante se anula, por lo que el rango no será 3. Buscamos un menor de orden 2 no nulo → Por ejemplo $|\alpha_{33}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0$ → $rango(A)=2$.

Ahora debemos estudiar el rango de la matriz ampliada, ya que al añadir una columna a la matriz A, puede ocurrir que el rango de A/C sea 3 y estemos ante un sistema incompatible (sin solución).

En efecto, si en $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ tomamos la submatriz formada por la columna 2, la columna 3 y la columna 4, su determinante es no nulo.

$$|C_2 C_3 C_4|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-2-8-8-(-2+8+8)=-32\neq 0 \rightarrow rango(A/C)=3 \rightarrow$$

Al no coincidir con $rango(A)=2$, según el Teorema de Rouché-Frobenius, tendremos Sistema Incompatible sin solución.

- Si $a=-2 \rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ → Sabemos que el determinante de anula, por lo que el rango no puede ser 3. Buscamos un menor de orden 2 no nulo → Por ejemplo $|\alpha_{33}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-4+1=-3\neq 0 \rightarrow rango(A)=2$.

Ahora debemos estudiar el rango de la matriz ampliada.

$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ → Las cuatro submatrices de orden 3 contenidas dentro de la matriz ampliada A/C tienen determinante nulo. Por lo que el $rango(A/C)\neq 3$.

Para darnos cuenta de esto podemos hacer el determinante de las cuatro submatrices de orden 3, o bien comprobar la siguiente proporcionalidad $F_3=-2F_1$ → Al existir esta combinación lineal, el rango de A/C no será 3 ya que podremos obviar una fila.

Es fácil encontrar un menor de orden 2 no nulo: Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-4+1=-3\neq 0 \rightarrow$ $rango(A/C)=2$

Es decir, tenemos $rango(A)=rango(A/C)=2<3(número\ \ incógnitas) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado (con un parámetro libre) según Rouché-Frobenius.

b) Debemos resolver el sistema en el caso S.C.D. La solución quedará en función del parámetro a.

Vamos a resolverlo aplicando la regla de Cramer.

$$\left\{\begin{matrix} 2x+y+az=-1 \\ -x+ay-z=2 \\ 2ax-2y+a^2z=2 \end{matrix}\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{pmatrix} \rightarrow \quad |A|=a^2-4\neq 0 \quad \rightarrow \text{Por ser S.C.D. al considerar} \quad a\neq\pm 2$$

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & -1 \\ -1 & a & -1 & 2 \\ 2a & -2 & a^2 & 2 \end{array}\right)$$

Aplicamos Cramer.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{vmatrix}=2a^3-2a+2a-(2a^3+4-a^2)=a^2-4$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 2 & a & -1 \\ 2 & -2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{-a^3-2-4a-(2a^2-2+2a^2)}{a^2-4}=\frac{-a(a^2+4a+4)}{(a-2)(a+2)}=\frac{-a(a+2)^2}{(a-2)(a+2)}=\frac{-a(a+2)}{a-2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 \\ 2a & 2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{4a^2+2a-2a-(4a^2-4+a^2)}{a^2-4}=-1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 2a & -2 & 2 \end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{4a+4a-2-(-2a^2-8-2)}{a^2-4}=\frac{2a^2+8a+8}{a^2-4}=\frac{2(a+2)^2}{(a+2)(a-2)}=\frac{2(a+2)}{a-2}$$

Fíjate que los denominadores nunca se anulan, al estar en el caso S.C.D. con $a\neq\pm 2$, por lo que las incógnitas se pueden despejar de manera única.

7. Sabemos que el sistema siguiente tiene una única solución $\begin{Bmatrix} x+a\,y=1 \\ x+a\,z=1 \\ y+z=a \end{Bmatrix}$

a) Comprueba que $a\neq 0$

b) Encuentra la solución del sistema en función del parámetro a **.**

a) Notación matricial → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$ → Si el sistema es SCD con solución única, significa que el determinante de la matriz del sistema es distinto de cero, ya que así su rango será 3 y coincidirá con el rango de la matiz ampliada. Y por el teorema de Rouché-Frobenius, si coincide con el número de incógnitas, el sistema es SCD con solución única.

$|A|=0+0+a-(0+a+a)=-a$ → Efectivamente, el determinante solo se anula si $a\neq 0$ → Por lo tanto, si el sistema es SCD, debe cumplirse que $a\neq 0$.

b) Podemos aplicar Cramer o bien resolver por Gauss.

Vamos a aplicar Gauss.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$ → $F_2'=F_2-F_1$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$ → $F_3'=a\,F_3+F_2$ →

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a & a^2 \end{array}\right)$ → Resolvemos en cascada en cada fila (recordamos que $a\neq 0$)

De la tercera fila → $2\,a\,z=a^2 \;\rightarrow\; z=\frac{a}{2}$

De la segunda fila → $-a\,y+a\cdot\frac{a}{2}=0 \;\rightarrow\; y=\frac{-a}{2}$

De la primera fila → $x+a\frac{-a}{2}=1 \;\rightarrow\; x=1+\frac{a^2}{2} \;\rightarrow\; x=\frac{2+a^2}{2}$

8. Sea el sistema $A\,X=B$ **, donde** $A=\begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & a \end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix} 1 \\ a-2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **.**

a) ¿Para qué valores de a **el sistema tiene solución única?**

b) ¿Para qué valores de a **el sistema no tiene solución?**

c) ¿Para qué valores de a **el sistema tiene al menos dos soluciones?**

d) Halla las soluciones cuando el sistema sea compatible.

a) El sistema tiene solución única, por el **Teorema de Rouché-Frobenius**, si los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada coinciden y son igual al número de incógnitas (tres incógnitas en nuestro ejemplo).

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \\ 3 & 4 & a & 3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, necesitamos que $rango(A)=3=rango(A/B)$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & a \end{vmatrix}=a^2-8a+15=(a-3)(a-5)$$

Si $a\neq 3$ y $a\neq 5$ $\rightarrow$ $|A|\neq 0$ $\rightarrow$ $rango(A)=3=rango(A/B)=número\,incógnitas$ $\rightarrow$ Como la matriz del sistema está contenida en la matriz ampliada, y ambas pueden tener un rango máximo igual a tres, si la primera del sistema tiene rango tres, la ampliada también tendrá rango tres → Solución única → Sistema Compatible Determinado.

b) Estudiamos si $a=3$ o $a=5$ generan un sistema solución. Para ello estudiamos el rango de la ampliada.

Si $a=3$ → Buscamos un menor de orden dos nulo en la matriz del sistema → $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0$ → $rango(A)=2$

Si $a=3$ $\rightarrow$ $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ $|C_1C_2C_4|=|C_1C_3C_4|=|C_2C_2C_4|=0$ → Todos los menores de orden tres de la matriz ampliada son nulos → $rango(A/B)=2$ → Infinitas soluciones

Si $a=5$ → Buscamos un menor de orden dos nulo en la matriz del sistema → $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0$ → $rango(A)=2$

Si $a=5$ → $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$ → $|C_1 C_2 C_3|=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}=15+0+18-(3+0+60)\neq 0$ → $rango(A/B)=3\neq 2=rango(A)$ → No hay solución → Sistema Incompatible

c) Como hemos deducido en el apartado anterior, tendremos al menos dos soluciones en el caso de Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones) → $a=3$

d) Si nos piden resolver en el caso de sistema compatible, se refiere tanto a determinado como indeterminado.

Si $a=3$ → Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (recuerda que el número de grados de libertad se obtiene como la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de la matriz ampliada).

$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$ → **¿Qué ecuación puedo obviar, al ser SCI?**

Puedo aplicar Gauss para comprobar qué ecuación puedo obviar. O puedo darme cuenta de que la tercera fila es la primera fila más dos veces la segunda fila. Es decir: $F_3=F_1+2F_2$

Puedo obviar una ecuación, por ejemplo, la tercer fila.

$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → $z=\lambda$ → $y=1-2\lambda$ → $x=\frac{-1}{3}+\frac{5\lambda}{3}$

En el caso $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \\ 3 & 4 & a & 3 \end{array}\right)$ con $a\neq 3$ y $a\neq 5$, estamos en Sistema Compatible Determinado, por lo que podemos obtener la solución única por **Cramer** o bien resolver aplicando el método de **sustitución**, o **triangulando por Gauss (elijo este método, para no tener que hacer tantos determinantes por Cramer... aunque también va a ser un poco largo y tedioso)**. Pues nada, a vencer la pereza de tener que operar y a resolver se ha dicho.

$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \\ 3 & 4 & a & 3 \end{array}\right)$ → $F'_3=aF_3-3F_1$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \\ 0 & 4a-6 & a^2+3 & 3a-3 \end{array}\right)$ →

$$F_3'=F_3-(4a-6)F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \\ 0 & 0 & a^2-8a+15 & -4a^2+17a-15 \end{array}\right)$$ → Factorizamos →

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \\ 0 & 0 & (a-3)(a-5) & (a-3)(-4a+5) \end{array}\right)$$

Resolvemos.

$$z=\frac{-4a+5}{a-5} \quad , \quad y=\frac{a(a+1)}{a-5} \quad , \quad x=\frac{-2a-5}{a-5}$$