Hoja de trabajo #2.

① $f(t) = -5t^2 + 2t + 6 \longrightarrow$ posición en cada instante de tiempo de la partícula P

a) $0 \leq t \leq \boxed{1,31}$

$\longrightarrow -5t^2+2t+6=0$ $\qquad \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$t = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-5)(6)}}{2(-5)}$ $\qquad \boxed{\begin{array}{l} a=-5 \\ b=2 \\ c=6 \end{array}}$

$t = \dfrac{-2 \pm \sqrt{124}}{-10} \rightarrow t = \dfrac{2 \pm \sqrt{124}}{10} \longrightarrow t = \dfrac{2(1+\sqrt{31})}{2 \cdot 5}$ ...

... $t = \dfrac{1+\sqrt{31}}{5} \longrightarrow \boxed{t = \dfrac{1+\sqrt{31}}{5}} \approx 1,31$

$\boxed{P = (z, f(t))}$

b) geogebra.

② a) y b) y c)

PVI 1 $v(1/5) = 0$, $pos(0) = 6$, $a = -10$
($v \to f'$, $pos \to f$, $a \to f''$)

Si se puede tener otro PVI, y sería el caso de.

PVI 2 $\quad f(1) = 3$, $f'(1) = -8$

solución PVI 1

$f'' = -10$. (integrar)

$f' = -10t + C$.

$0 = -10(1/5) + C$ (despejar)

$C = 2$.

$f' = -10t + 2$ (integrar).

$f = -\dfrac{10}{2}t^2 + 2t + C$.

$6 = -5(0) + 2(0) + C$. (despejar)

$C = 6$.

$\boxed{f = -5t^2 + 2t + 6.}$ es solución a la ED $f'' = -10$.

solución PVI 2.

$f'' = -10$. (integrar)

$f' = -10t + C$.

$-8 = -10(1) + C$.

$C = 2$ (despejar)

$f' = -10t + 2$ (integrar)

$f = -\dfrac{10}{2}t^2 + 2t + C$.

$3 = -5(1) + 2(1) + C$. (despejar)

$C = 6$

$\boxed{f = -5t^2 + 2t + 6}$, es solución a la ED $f'' = -10$.

c). Ejemplo de PVI de tercer orden.

$f(-1)=0$

$f'(2)=1$

$f''(0)=-1$

ED: $f''' = -4$

solución =

$f''' = -4$ (integrar).

$f'' = -4x + C$

$-1 = -4(0) + C \quad C = -1$ (despejar)

$f'' = -4x - 1$

$f' = -\frac{4x^2}{2} - x + C$ (integrar)

$1 = -2(2)^2 - 2 + C.$

$1 = -10 + C \quad C = 11$ (despejar)

$f' = -2x^2 - x + 11$

$f = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 11x + C$ (integrar)

$0 = \frac{-2(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + 11(-1) + C$

$0 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 11 + C.$

$C = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 11.$

$C = \frac{65}{6}$

$$\boxed{f = -\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 11x + \frac{65}{6}}$$

solución a la ED $f''' = -4$.

d). El método general para construir un PVI de orden $n$ es dar $n$ condiciones iniciales, ya que es la información necesaria para despejar las constantes $C_n$, que resultan de cada integración.

familias n-paramétricas de curvas

① $f(t) = -5t^2 + c_1 t + c_2$

a) GeoGebra

b) i. $f''(t) = -10$ , $t_0 = \frac{1}{2}$ , $f(1/2) = 5.25$ , $f'(1/2) = 0$.

ii. $f'' = -10$.

$f' = -10x + c_1$

$0 = -10(1/2) + c_1 \longrightarrow \boxed{c_1 = 5}$

$f' = -10x + 5$

$f = \frac{-10x^2}{2} + 5x + c_2$.

$5.25 = -5(1/2)^2 + 5(1/2) + c_2$

$c_2 = 5.25 + \frac{5}{4} - \frac{5}{2} \longrightarrow \boxed{c_2 = 4}$

$f = -5x^2 + 5x + 4$.

$x = t$.

$f = -5t^2 + 5t + 4$

c). i. $f''(t) = -10$ , $t_0 = 0$ , $f(0) = 2$ , $f'(0) = 3$.

ii. $f'' = -10$

$f' = -10x + c_1$

$3 = -10(0) + c_1 \longrightarrow \boxed{c_1 = 3}$

$f' = -10x + 3$

$f = -5x^2 + 3x + c_2$

$2 = -5(0)^2 + 3(0) + c_2 \longrightarrow \boxed{c_2 = 2}$

$f = -5x^2 + 3x + 2$.

$x = t$

$f = -5t^2 + 3t + 2$.

② "Al resolver un PVI de orden n usando solamente la ecuación diferencial, se obtiene una familia n-paramétrica de curvas solución."

a. $\boxed{n=1}$

$f' = 3$.

$f = 3x + C_1 \longrightarrow$ solución de ED $f' = 3$.

$\boxed{n=2}$.

$f'' = 4$,

$f' = 4x + C_1$

$f' = 4x + C_1$.

$f = \frac{4x^2}{2} + C_1 x + C_2 \longrightarrow f = 2x^2 + C_1 x + C_2$.

$f = 2x^2 + C_1 x + C_2$

$\boxed{n=3}$

$f''' = \pi$.

$f'' = \pi x + C_1$

$f' = \frac{\pi x^2}{2} + C_1 x + C_2$.

$f = \frac{\pi x^3}{6} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

b) Al no tener condiciones iniciales cada una de las constantes que resultan de cada integración, pueden tomar cualquier valor, independientemente del valor que tomen, la función obtenida será solución de la ED planteada en el inicio.

Ecuaciones diferenciales y sus soluciones

1. a. una ecuación diferencial de orden n es aquella que relaciona una función, variable independiente y la "n" derivada de la función.

Ejemplo ED orden 4.

$$y^{(4)} = \frac{2y}{x}.$$

Ejemplo ED orden 2.

$$y'' = 12.$$

b. una solución de una ecuación diferencial de orden n. es una función que al derivarla n veces cumple la ecuación diferencial.

Ej: ED $y' = \frac{4y}{x}$. $\boxed{y = x^4}$

$y=x^4$. es solución de $y'=\frac{4y}{x}$ ya que $y' = 4x^3$. y al reemplazar

$$4x^3 = \frac{4x^4}{x} \longrightarrow \boxed{4x^3 = 4x^3}$$

2. noción de derivabilidad y continuidad:

Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en él.

Una funcion es contínua en un punto a si:

- la función existe en a
- Existe $\lim_{x \to a} f(x)$
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

c. $y=\frac{1}{x}$ $x \neq 0$.

ED. $\boxed{x\frac{dy}{dx} = y}$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y' = -x^{-2}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\boxed{x y' = y}$$

$$x \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x}.$$

$$\frac{-1}{x} \neq \frac{1}{x}$$

$y=\frac{1}{x}$ no es una solución para $xy' = y$. dado que la primera derivada de la función y $\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ al reemplazarse en la ED no cumple la ecuación.

Resolución y formulación de problemas.

1. a) $y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq C \\ (x-C)^2, & x > C \end{cases}$

$$y' = 2\sqrt{y}$$

para los $x \leq C$. $y=0$, por lo que $y'=0$.
si reemplazamos en $y' = 2\sqrt{y}$ obtenemos
$0 = 2\sqrt{0} \longrightarrow 0 = 0$ ✓

Para los $x > C$. $y = (x-C)^2$; $y' = 2(x-C)$.
si reemplazamos en $y' = 2\sqrt{y}$ obtenemos.
$2(x-C) = 2\sqrt{(x-C)^2} \longrightarrow 2(x-C) = 2(x-C)$.

b). PVI: $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 0$.
$y = 2\sqrt{y}\,x$
$0 = 2\sqrt{y}\,(0)$.
infinitas soluciones dado que la pendiente de la recta tangente en infinitos puntos es $=$ a "0".

2. $y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ Cx, & x > 0 \end{cases}$

$\boxed{xy' = y}$

Para $x \leq 0$ $y = 0$, $y' = 0$.
$x(0) = 0$
$0 = 0$ ✓

Para $x > 0$ $y = Cx$, $y' = C$.
$Cx = Cx$ ✓

· independientemente del valor de "C" la función $y = Cx$ es solución de la ED $xy' = y$.