

## La Lata

### 1. OBJETIVO:

Que el estudiante identifique la relación funcional entre dos variables, el tipo de esta relación, la determinación de su dominio, su imagen, bosqueje la gráfica de la rapidez instantánea de cambio e identifique la relación entre la función y su razón instantánea de cambio.

La práctica incide sobre el desarrollo de las siguientes:

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS <sup>1</sup>	COMPETENCIAS GENÉRICAS <sup>2</sup>	HABILIDADES SOCIOEMOCIONALES <sup>3</sup>
<p>1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.</p> <p>2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.</p> <p>3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.</p> <p>4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.</p> <p>8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.</p>	<p><b>Se expresa y se comunica</b></p> <p>4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.</li> <li>• Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.</li> </ul> <p><b>Piensa crítica y reflexivamente</b></p> <p>5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.</li> <li>• Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.</li> </ul> <p>6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.</li> </ul> <p><b>Aprende de forma autónoma</b></p> <p>7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.</li> </ul> <p><b>Trabaja en forma colaborativa</b></p> <p>8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.</li> <li>• Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.</li> <li>• Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.</li> </ul>	<p><b>Colaboración y trabajo en equipo</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Trabaja en equipo de manera constructiva y ejerce un liderazgo participativo y responsable,</li> <li>• Propone alternativas para actuar y solucionar problemas.</li> <li>• Asume una actitud constructiva.</li> </ul>

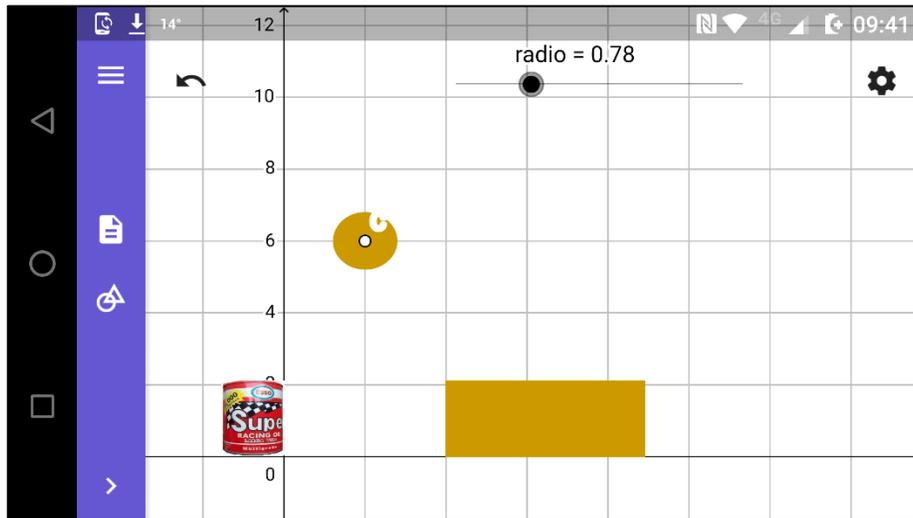
<sup>1</sup> <http://www.sep.gob.mx/work/sites/sep1/resources/LocalContent/111950/9/a486.htm>

<sup>2</sup> [http://www.sems.gob.mx/aspnv/video/Diptico\\_Competicencias\\_altares.pdf](http://www.sems.gob.mx/aspnv/video/Diptico_Competicencias_altares.pdf)

<sup>3</sup> [https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/264246/Las\\_HSE\\_en\\_nuevo\\_modelo\\_educativo.pdf](https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/264246/Las_HSE_en_nuevo_modelo_educativo.pdf)

## PLANTEAMIENTO

Un fabricante de aceite para motor desea construir latas cilíndricas con capacidad de 1 litro, ¿qué altura y qué radio deben tener las latas para que el material con que se construyan sea mínimo?



Carga en tu dispositivo el archivo **lalata1.ggb** y ábrelo.

Para contestar las preguntas siguientes, trabaja colaborativamente con tus compañeros de equipo

1. ¿Qué es lo que cambia cuando se desliza el punto **radio**? \_\_\_\_\_

2. ¿Consideras que con este cambio que identificaste cambia la cantidad de metal necesario para construir la lata? ¿Sí?, ¿No? Discútelo con tus compañeros de equipo \_\_\_\_\_

3. ¿Qué fórmula se requiere para calcular el área total de la lata? Anótala (Considera que construir la lata requiere metal para el cuerpo, su base y su tapa).

a)  $A = base * altura$                       b)  $A = 2\pi * radio * altura + 2\pi * radio^2$                       c)  $A = 4\pi * radio * altura$

4. De acuerdo a tu experiencia con funciones, la expresión que elegiste en el paso anterior, ¿es una función?, ¿sí?, ¿no? ¿Porqué? \_\_\_\_\_

5. Es posible que requieras considerar el dato que se te proporciona en el enunciado (Volumen de la lata = 1 litro). Si tomamos en cuenta que la lata es un cilindro, esto lo podríamos expresar como ...

a)  $\pi * radio^2 * altura = 1$                       b)  $\pi * radio = 1$                       c)  $\frac{4}{3}\pi * radio^3 = 1$

6. Si combinas las expresiones elegidas en los puntos 4 y 5 llegarás a obtener la función. ¿Cuál en tu opinión es la correcta? Justifica tu elección

a)  $A(radio) = \frac{4}{2\pi r} + 2\pi radio^2$                       b)  $A(radio) = \frac{2}{r} + 2\pi radio^2$                       c)  $A(radio) = \pi radio^3$

7. ¿Cómo se denominan este tipo de funciones?

a) Cuadráticas                      b) Lineales                      c) Cúbicas                      d) Racionales

8. En esta función, ¿cuál es la variable dependiente? \_\_\_\_\_

9. ¿Cuál es la variable independiente? \_\_\_\_\_

En este tipo de funciones se identifica la presencia de un elemento que hasta ahora no hemos comentado. Se trata de las **ASÍNTOTAS**.

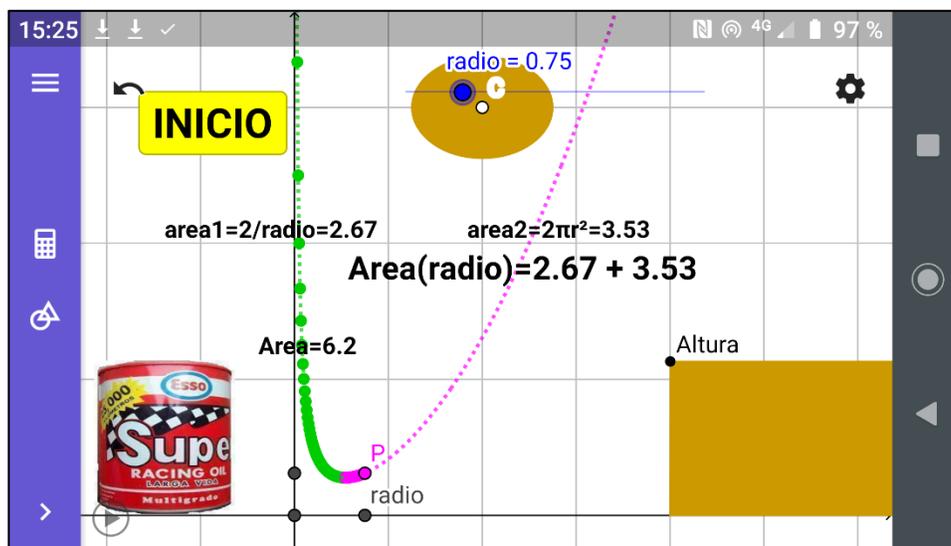
En [matemáticas](#), se le llama **asíntota** de la gráfica de una función a una recta a la que se aproxima continuamente la gráfica de tal función; es decir que la distancia entre las dos tiende a ser cero (0), a medida que se extienden indefinidamente.

10. En la gráfica de la función de este ejercicio, ¿dónde observas que se presenta un comportamiento **ASINTÓTICO**?

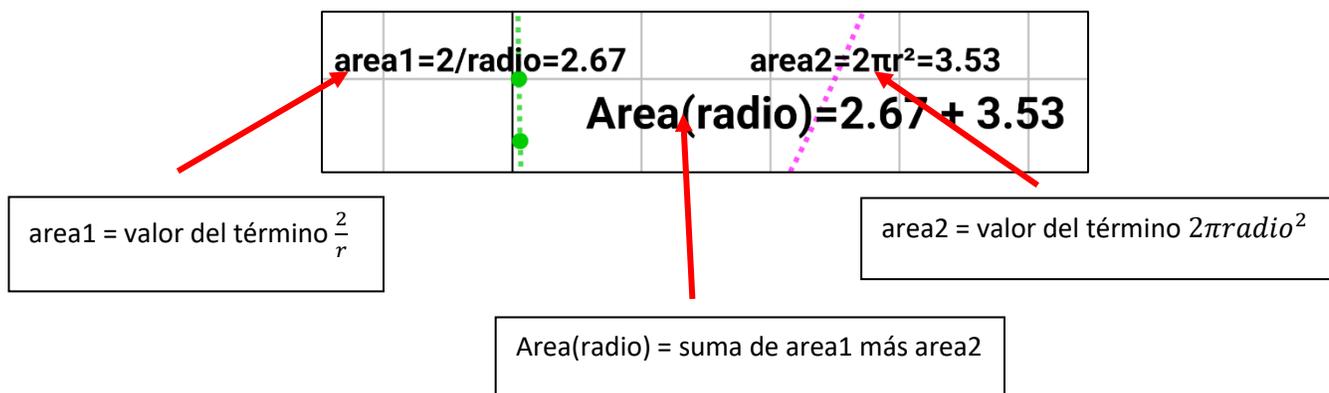
a) radio = 0

b) radio =

Pero, ¿cuál es la razón de que suceda esto? Abre el archivo **lalata2.ggb** para analizar un aspecto interesante de esta función



La opción que elegiste como respuesta a la pregunta 6 fue  $A(\text{radio}) = \frac{2}{r} + 2\pi \text{radio}^2$  y, en esta expresión están presentes dos términos. El primero es  $\frac{2}{r}$  el cual es una expresión **racional** (el término racional proviene de la palabra razón = división) y el segundo es  $2\pi \text{radio}^2$  que corresponde a una expresión **cuadrática**. En pantalla, además de la imagen de la lata y la gráfica de la función Area(radio) aparecen tres expresiones



11. Cuando el valor del radio es muy cercano a cero, ¿qué le sucede al valor de  $area1$ ? \_\_\_\_\_

12. Cuando el valor del radio es muy cercano a cero, ¿qué le sucede al valor de  $area2$ ? \_\_\_\_\_

13. Y en entonces, en la cercanía de **radio = 0**, ¿cuál de las dos áreas se hace mayor? \_\_\_\_\_

Tus respuestas nos llevan a concluir que, en la proximidad de **radio = 0**, el comportamiento de la función  $Area(radio)$  está dominada por el comportamiento del término  $\frac{2}{r}$ .

14. A medida que el valor del radio se aleja de cero, ¿qué le sucede al valor de **area1**? \_\_\_\_\_

15. A medida que el valor del radio se aleja de cero, ¿qué le sucede al valor de **area2**? \_\_\_\_\_

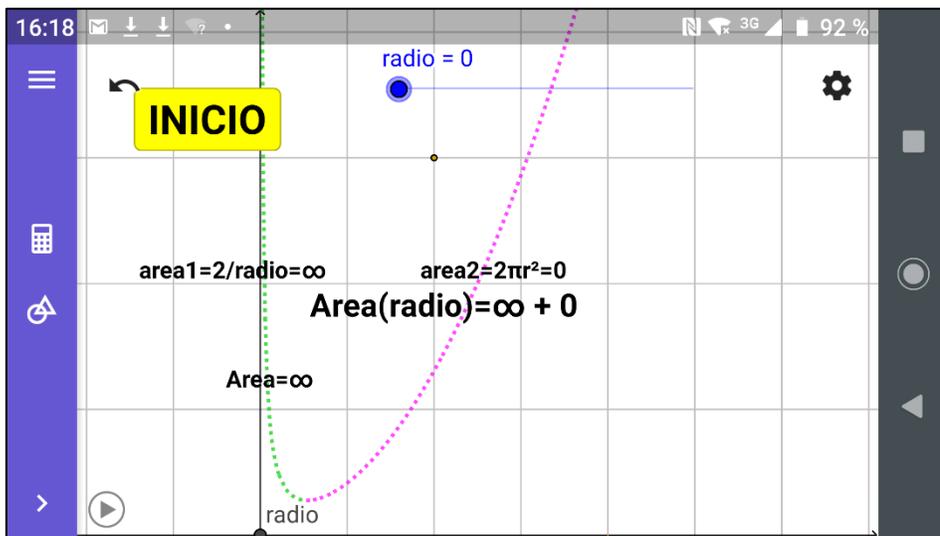
16. Y en entonces, a medida que el radio aumenta ¿cuál de las dos áreas se hace mayor? \_\_\_\_\_

17. Por lo tanto, para valores mayores del radio, la gráfica de la función **Area(radio)** parece ser la gráfica de una \_\_\_\_\_

18. ¿Cuál es el dominio de esta función? \_\_\_\_\_

19. ¿Cuál es su imagen? \_\_\_\_\_

Para esta última pregunta, te sugerimos manipular el valor del deslizador **radio** y colocarlo en **radio = 0**



**NOTA IMPORTANTE:** Los valores de área mínima, radio mínimo, etc. que serán calculados a través de la pantalla provienen de una función afectada por un factor de proporcionalidad utilizado en la construcción GeoGebra que se está utilizando. Los valores correspondientes a la función determinada en la pregunta 6, de área mínima  $A_{min}$ , radio mínimo  $radio_{min}$ , etc. se recomienda calcularlos utilizando el graficador de GeoGebra

14. ¿Para qué valor del **radio**, el área **A** de la lata alcanza su valor mínimo  $A_{min}$ ? \_\_\_\_\_

15. Llamaremos a este valor del radio  $radio_{min}$ . ¿Qué le sucede al área **A** de la lata para valores del **radio** menores a  $radio_{min}$  ( $0 \leq radio < radio_{min}$ )? \_\_\_\_\_

16. Y, si a estos cambios del área **A** los representamos como  $\Delta A$ , ¿cuál de las siguientes expresiones aplicaría en este intervalo de valores? Elige una de las tres opciones subrayándola

a)  $\Delta A > 0$

b)  $\Delta A < 0$

c)  $\Delta A = 0$

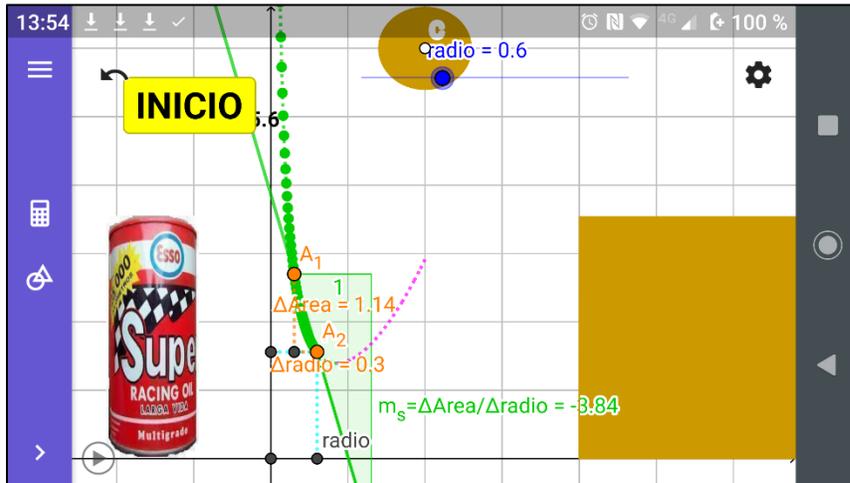
17. Si ahora, analizamos qué le sucede al área **A** para valores de **radio** mayores a **radio<sub>min</sub>** ( $\text{radio} > \text{radio}_{\text{min}}$ ), ¿cuál de las siguientes expresiones aplicaría? Elige una de las tres opciones subrayándola

a)  $\Delta A > 0$

b)  $\Delta A < 0$

c)  $\Delta A = 0$

Nos interesa analizar algunos aspectos de nuestra gráfica que aún no hemos discutido. Para ello abre el archivo **lalata3.ggb** en tu dispositivo



**NOTA IMPORTANTE:** Cuando la secante se encuentre ubicada en un intervalo en donde la función sea decreciente el valor de  $\Delta A$  que aparece en pantalla debe registrarse con signo negativo en la tabla

Observa en esta imagen que sobre la gráfica de la función **A(radio)** aparecen dos puntos **A<sub>1</sub>** y **A<sub>2</sub>** y, por esta pareja de puntos pasa una recta. Como esta recta corta a la curva en dos puntos, recibe el nombre de **SECANTE** de la curva. Además, en pantalla también tenemos la pendiente  $m_s$  de esta SECANTE (¿recuerdas que en tu curso de Geometría Analítica estudiaste el concepto de pendiente? ¿qué fórmula usabas para calcularla?)

18. Desplaza los puntos **A<sub>1</sub>** y **A<sub>2</sub>** colocándolos a ambos **antes** del punto mínimo (punto más bajo en la gráfica). Observa que también en pantalla aparece el valor de la pendiente de esta secante,  $m_s$ . ¿Cómo es el valor de  $m_s$  cuando **A<sub>1</sub>** y **A<sub>2</sub>** se encuentran antes de este punto?

a) positivo

b) negativo

c) cero

19. ¿Porqué? \_\_\_\_\_

20. ¿Cuál es la fórmula que en este caso se utiliza para calcular  $m_s$ ? Aplica tus conocimientos de Geometría Analítica y tu experiencia en prácticas con movimiento para determinar esta fórmula \_\_\_\_\_

A esta expresión se le suele llamar en Cálculo **rapidez de cambio promedio**. Este nombre se debe a que da una idea de qué tan rápido cambia el área ( $\Delta A$ ) al tiempo que cambia el radio ( $\Delta \text{radio}$ ).

21. Ahora, desplaza los puntos **A<sub>1</sub>** y **A<sub>2</sub>** colocándolos a ambos **después** del punto mínimo. ¿Cómo es el valor de  $m_s$  cuando **A<sub>1</sub>** y **A<sub>2</sub>** se encuentran después de este punto?

a) positivo

b) negativo

c) cero

22. ¿Porqué? \_\_\_\_\_

23. Enseguida, coloca a **A<sub>1</sub>** y **A<sub>2</sub>** en dos posiciones distantes y ve acercando **A<sub>1</sub>** a **A<sub>2</sub>** **GRADUALMENTE** (únicamente mueve a **A<sub>1</sub>**; a **A<sub>2</sub>** mantenlo fijo). Para cada nueva posición de **A<sub>1</sub>** anota los valores de  $\Delta \text{radio}$ , de  $\Delta A$  y de  $m_s$  en la tabla siguiente.





37. ¿Consideras que esta gráfica es la gráfica de una función? \_\_\_\_\_

38. Si tu respuesta anterior es afirmativa, ¿cuáles serían las variables presentes en esta función? \_\_\_\_\_

39. ¿Identificas algún tipo de relación entre las dos gráficas? Coméntalo con tus compañeros de equipo y explícalo

40. ¿Consideras que este problema sea un ejemplo de un problema de OPTIMIZACIÓN? ¿sí? ¿no? ¿porqué? \_\_\_\_\_

41. Revisa con tu profesor el procedimiento para determinar una expresión para calcular la **rapidez instantánea de cambio** del área **A** y su relación con los procesos de optimización.