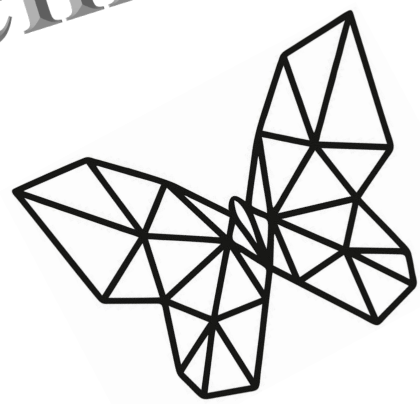
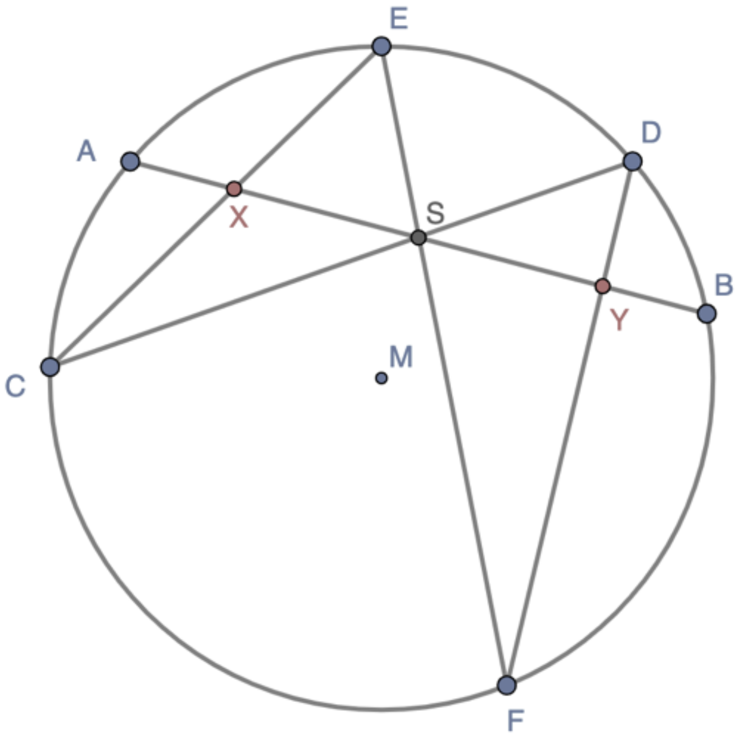
De vlinderstelling



Adriënne van Splunter & Heleen Hoek

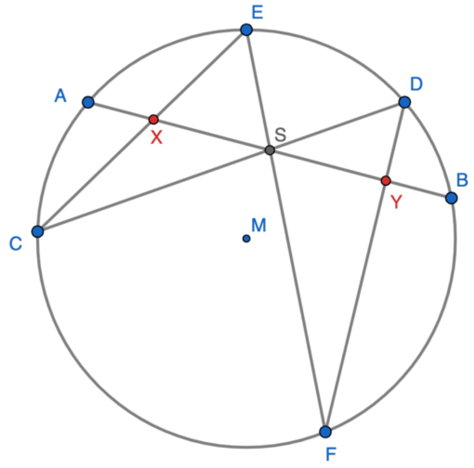


Uitwerkingen

Opgave 1:

De tekening kan afwijzen van tekening hiernaast.
Controleer:

- Punten X, Y en S liggen op koorde AB.
- EF en DC gaan door punt S.



Opgave 3:

$$\left.\begin{array}{l}\angle YXB = \angle BAY \text{ (constante hoek)} \\ \angle ABX = \angle XYA \text{ (constante hoek)}\end{array}\right\} \rightarrow \Delta OXB \sim \Delta OAY$$

Hieruit volgt $\frac{XO}{OB} = \frac{AO}{OY}$
Waaruit uiteindelijk volgt $|AO| \cdot |OB| = |XO| \cdot |OY|$

Opgave 4:

a.
$\angle CSY = \angle DSX$ (*overstaande hoeken*)
$\angle BSY = \angle ASX$ (*overstaande hoeken*)
$\angle XAS = \angle YCS$(*stelling van de constante hoek*)
$\angle XDS = \angle YBS$(*stelling van de constante hoek*)
$\Delta XES \sim \Delta SFY$ (*vanwege* $\angle BSY = \angle ASX$ *en de rechte hoeken door de loodlijnen*)
$\Delta XHS \sim \Delta SGY$ (*vanwege* $\angle CSY = \angle DSX$ *en de rechte hoeken door de loodlijnen*)
$\Delta XEA \sim \Delta YGC$ (*vanwege* $\angle XAS = \angle YCS$ *en de rechte hoeken door de loodlijnen*)
$\Delta XHD \sim \Delta YFB$ (*vanwege* $\angle XDS = \angle YBS$ *en de rechte hoeken door de loodlijnen*)

b.
Vanuit $\Delta XES \sim \Delta SFY$ volgt $\frac{XS}{YS} = \frac{XE}{YF}$. (1)
Vanuit$\Delta XHS \sim \Delta SGY$ volgt $\frac{XS}{YS} = \frac{XH}{YG}$. (2)
Vanuit $\Delta XEA \sim \Delta YGC$ volgt $\frac{XE}{YG} = \frac{AX}{CY}$. (3)
Vanuit $\Delta XHD \sim \Delta YFB$ volgt $\frac{XH}{YF} = \frac{DX}{BY}$. (4)
Uit stap (1) en (2) volgt $\frac{XS^2}{YS^2} = \frac{XE}{YF} \cdot \frac{XH}{YG} = \frac{XE}{YG} \cdot \frac{XH}{YF}$.
Door dit te combineren met stap (3) en (4) krijg je $\frac{XE}{YG} \cdot \frac{XH}{YF} = \frac{AX}{CY} \cdot \frac{DX}{BY} = \frac{AX \cdot DX}{CY \cdot BY}$

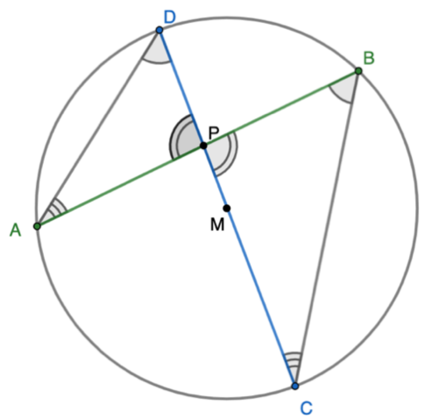
c.
$AX \cdot DX = PX \cdot XQ$
$CY \cdot BY = QY \cdot YP$
Dit samen geeft
$$\frac{PX \cdot XQ}{QY \cdot YP}$$

d.
$PX = a - x$
$XO = a + x$
$QY = a - y$
$PY = a + y$
Vanuit vraag c en d volgt $\frac{PX \cdot XQ}{QY \cdot YP} = \frac{(a-x)\cdot(a+x)}{(a-y)\cdot(a+y)} = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}$
Dit geeft, gecombineerd met vraag b, dat $\frac{XS^2}{YS^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}$
$XS = x$ en $XY = y$ dit geeft $\frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}$
Kruislings vermenigvuldigen en haakjes uitwerken geeft
$x^2 \cdot (a^2 - y^2) = y^2 \cdot (a^2 - x^2)$
$x^2a^2 - x^2y^2 = y^2a^2 - y^2x^2$
Verder eenvoudige geeft:
$x^2a^2 = y^2a^2 \ \rightarrow x^2 = y^2 \ \rightarrow x = y$
$x = y$ omzetten naar de zijdes is $XS = YS$
En hiermee is de vlinderstelling bewezen.

Opgave 5:

$$\left.\begin{array}{r} \angle APD = \angle BPC \ (overstaande\ hoeken) \\ \angle PAD = \angle PCB \ (stelling\ van\ de\ constante\ hoek) \\ \angle PDA = \angle PBC \ (stelling\ van\ de\ constante\ hoek) \end{array}\right\} \Delta APD \sim \Delta CPB$$

ΔAPD	PA	PD	AD
ΔCPB	PC	PB	BC



Hieruit volgt $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$

$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$

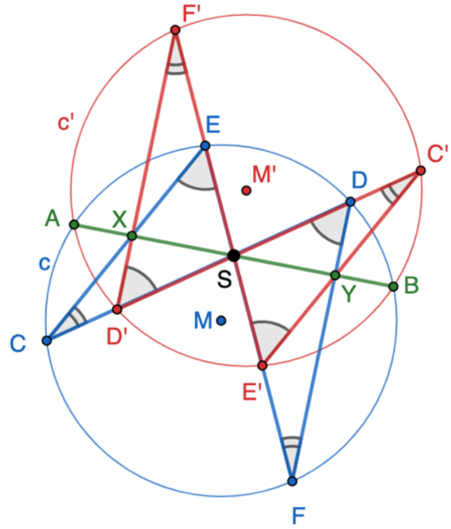
$= (PM + r)(PM - r)$

$= PM^2 - r^2$

Opgave 6:

$$\left.\begin{array}{r} \angle C'QD = \angle FQE' \ (overstaande\ hoeken) \\ \angle DC'Q = \angle E'FQ \ (stelling\ van\ de\ constante\ hoek\ en\ puntspiegeling) \end{array}\right\} \Delta C'DQ \sim \Delta FE'Q$$

Hieruit volgt dat: $|DQ| \cdot |FQ| = |C'Q| \cdot |E'Q|$
Het linkerlid is gelijk aan de macht van punt S ten opzichte van cirkel c. Het rechterlid is gelijk aan de macht van punt S ten opzichte van cirkel c'
Dus $|DQ| \cdot |FQ| = |C'Q| \cdot |E'Q| = SM^2 - r^2 = SM'^2 - r^2$
Hieruit volgt dat $|SM| = |SM'|$
Dus ook Q moet op de middelloodlijn liggen van M' naar M en valt dus samen met het snijpunt van AB en met DF. Punt Q is dus gelijk aan punt Y.
Alles wat geldt voor punt Q geldt ook voor punt P door de puntspiegeling. Dus punt Q ligt ook op de middelloodlijn en is dus punt X.
Dus $|SX| = |SY|$



Opgave 7:

TB: $(PM^2 - r^2)$
Bewijs: $\angle ATP = \angle SBP \ (stelling\ van\ de\ constante\ hoek)$
$\angle BPS = \angle TPA \ (dezelfde\ hoek)$

- ⇨ $\Delta BPS \sim TPA$
- ⇨ $\frac{BP}{PS} = \frac{TP}{PA}$
- ⇨ $PB \cdot PA = PS \cdot PT$
- ⇨ $= (PM - r)(PM + r)$
- ⇨ $= (PM^2 - r^2)$

Opgave 8:

$$\left.\begin{array}{r} \angle C'QD = \angle FQE' \ (zelfde\ hoek) \\ \angle DC'Q = \angle E'FQ \ (stelling\ van\ de\ constante\ hoek\ en\ puntspiegeling) \end{array}\right\} \Delta C'DQ \sim \Delta FE'Q$$

Hieruit volgt dat: $|DQ| \cdot |FQ| = |C'Q| \cdot |E'Q|$
Het linkerlid is gelijk aan de macht van punt S ten opzichte van cirkel c. Het rechterlid is gelijk aan de macht van punt S ten opzichte van cirkel c'
Dus $|DQ| \cdot |FQ| = |C'Q| \cdot |E'Q| = SM^2 - r^2 = SM'^2 - r^2$
Hieruit volgt dat $|SM| = |SM'|$
Dus ook Q moet op de middelloodlijn liggen van M' naar M en valt dus samen met het snijpunt van AB en met DF. Punt Q is dus gelijk aan punt Y.
Alles wat geldt voor punt Q geldt ook voor punt P door de puntspiegeling. Dus punt Q ligt ook op de middelloodlijn en is dus punt X.
Dus $|SX| = |SY|$