HOJA DE TRABAJO 2 S-5

Ana María Velásquez G

1. https://www.geogebra.org/m/dpd7msxm
2. https://www.geogebra.org/classic/sxefumtc

14. $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}$; $y(0) = 0.$

$f(x,y) = \sqrt[3]{y} \Rightarrow$ continua en todo $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} \Rightarrow$ NO es continua cuando $y = 0.$

R// Por lo tanto, el teorema garantiza existencia pero NO garantiza unicidad de solución para el PVI $y(0) = 0.$

15) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$; $y(2) = 2.$

$f(x,y) = \sqrt{x-y}$, es continua para todo $x - y \geq 0$

$\boxed{x \geq y.}$

$x - y > 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x-y)^{-1/2} \Rightarrow$ continua cuando $x > y.$

R// El criterio NO es concluyente debido a que $x = y.$

16) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$, $y(2) = 1$

$R = \{(x,y) \mid 0 < x < 2 \; , -1 < y < 2\}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x-y)^{-1/2} \Rightarrow$ continua para $x > y$

R// El teorema garantiza existencia de una única solución.

3. https://www.geogebra.org/m/fvkcnx7v
4. https://www.geogebra.org/m/efks4fwn

3) $x\dfrac{dy}{dx} = 2y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$f(x,y) = \frac{2y}{x}$$

b) $y'(x) = 2x \quad y = x^2$

$$x\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$x(2x) = 2(x^2)$$

$$2x^2 = 2x^2 \checkmark$$

$y'(x) = c2x \quad y = cx^2$

$$x\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$x(c2x) = 2(cx^2)$$

$$c2x^2 = c2x^2. \checkmark$$

R// Hay una igualdad al sustituir la derivada en la EDO, lo cual indica que para cualquier valor de c, la curva f(x) si es solución a la EDO.

c)

$\rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \qquad y(0) = 0.$

$f(x,y) = \frac{2y}{x} \rightarrow$ es continua cuando $x \neq 0$.

Como no puede definir un rectángulo que contenga al punto $(0,0)$ que sea continua, entonces el teorema NO garantiza ni existencia ni unicidad de soluciones. para este PVI

$\rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \qquad y(-1) = 1$

$f(x,y) = \frac{2y}{x} \rightarrow$ continua cuando $x \neq 0$

$f_y(x,y) = \frac{2}{x} \rightarrow$ continua cuando $x \neq 0$.

R// el teorema garantiza existencia de una solución única para este PVI.

4.

a) $y' + 2xy^2 = 0$

$$y' = -2xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2$$

$$\int: \frac{dy}{y^2} = -2x\,dx.$$

$$(-1)\ \frac{-1}{y} = -x^2 + C \quad (-1)$$

$$\frac{1}{x^2 - C} = y.$$

b) i) $y(0) = 1 \qquad y' = -2xy^2 \rightarrow f(x,y) \Rightarrow$ continua en todo $\mathbb{R}^2$.

$f_y = -4xy \Rightarrow$ continua en todo $\mathbb{R}^2$.

R// Existe una única solución

ii) $y(1) = \frac{1}{2}$. $\Rightarrow$ única solución.

iii) $y(0) = -1$ $\Rightarrow$ única solución

iv) $y(0) = 0$ $\Rightarrow$ No hay solución.

Resuelvo PVI

i) $y(0) = 1$

$$\frac{1}{x^2 - C} = y \Rightarrow y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$1 = -C$$

$$\boxed{-1 = C}$$

ii) $y(1) = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{1 - C} = \frac{1}{2}$$

$$1 = \frac{1}{2}(1 - C)$$

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}C$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}) = C$$

$$\boxed{-1 = C}$$

entonces:

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

iii) $y(0) = -1$

$$\frac{1}{0^2 - C} = -1$$

$$-1 = -C$$

$$\boxed{1 = C}$$

entonces

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

iv) $y(0) = 0$.

$$\frac{1}{0 - C} = 0$$

$$\frac{1}{0} = -C \Rightarrow \text{indefinido}$$

Resolución de Problemas: 1. a) Sí es posible

1) . b)

$y = y(x)$

i) $y' = 2x\sqrt{y}$

$12 = 2x\sqrt{y}$.

ii) $y - 12x + 15 = 0$ tangente a la gráfica de $y(x)$.

$\Downarrow$

$y = 12x - 15$

$\downarrow$

$m = 12 = y'(x)$

Continuación pregunta 1). Resuelvo el sistema de ecuaciones.

$y = 12x - 15$

$36 = x^2(12x - 15)$.

$12 = 2x\sqrt{y}$

$\left(\frac{6}{x}\right)^2 = y$

$\boxed{x = 2}$

$y = 24 - 15$

$\boxed{y = 9}$ $\Rightarrow$ PVI $y(2) = 9$

$y' = 2x\sqrt{y}$ $\quad y(2) = 9$

$f(x,y) = 2x\sqrt{y}$ $\Longrightarrow$ continua cuando $y \geq 0$.

$f_y(x,y) = \frac{x}{\sqrt{y}}$ $\Longrightarrow$ continua cuando $y > 0$.

R// se garantiza existencia de una única solución. Para el PVI

Ahora: resuelvo la EDO.

$y' = 2x\sqrt{y}$

$\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y}$

$\int \frac{dy}{y^{1/2}} = 2x\,dx$

$2\sqrt{y} = x^2 + C$

$\sqrt{y} = \frac{x^2 + C}{2}$

$y = \left(\frac{x^2 + C}{2}\right)^2$

reemplazo el PVI para hallar C.

$9 = \frac{(4 + C)^2}{2^2}$

$36 = (4 + C)^2$

$36 = 4^2 + 8C + C^2$

$0 = C^2 + 8C - 20$

$C_1 = 2$

$C_2 = -10$

Para $C = 2$

$y = \frac{x^4 + 2x^2(2) + 2^2}{2^2}$

$\boxed{y = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1}$

Para $C = -10$

$y = \frac{x^4 + 2x^2(-10) + (-10)^2}{2^2}$

$\boxed{y = \frac{1}{4}x^4 - 5x^2 + 25}$

2. PVI: $y' = \sqrt{x - y}$, $y(2) = 1$

(a) $y' = \sqrt{2 - 1} = \pm 1$ $\Rightarrow$ en este caso al observar la recta en geogebra dio como la $m = -1$.

$y = mx + b$

$y - mx = b$

$1 - (1)(2) = b$

$-1 = b$

Ecuación de la recta: $\boxed{y = x - 1}$

Planteamiento del PVI a la manera del P.1. Determine una función $y = y(x)$ que cumpla con las siguientes condiciones:

* la derivada en todo punto (x, y) se calcula con $y' = \sqrt{x-y}$
* la recta $y - x + 1 = 0$ es tangente a la gráfica de $y(x)$.

b) $y' = \sqrt{x-y}$, $y(2) = 1$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y}$

$u = x - y$,

$\frac{du}{dx} = 1 - y'$

$\frac{du}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx}$.

$1 - \frac{du}{dx} = \sqrt{u}$

$\frac{du}{dx} = 1 - \sqrt{u}$

$\int: \frac{du}{1-\sqrt{u}} = dx$

$-2(\sqrt{u} + \ln(\sqrt{u} - 1)) = x + C$

$-2(\sqrt{x-y} + \ln(\sqrt{x-y} - 1)) - x = C$

$-2(\sqrt{2-1} + \ln(\sqrt{2-1} - 1)) - 2 = C$ ⇐ evaluando el PVI

$-2(\sqrt{1} + \ln(0)) - 2 = C$

↓

se indetermina.

R// Para el PVI $y(2) = 1$ NO hay solución porque se indetermina.

Punto 2 resolución de problemas: https://www.geogebra.org/m/ugkrat6e