# Tři magické vzorce

Algebra

*Magistr Chlodovít Kanistr*


23. října 2021

# Obsah



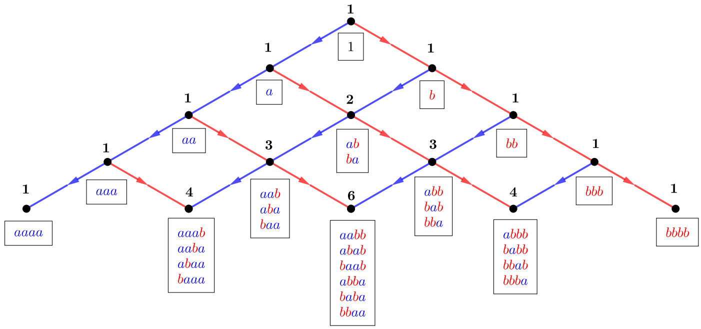
Vezměmež libovolná reálná $a, b \neq 0$.

# 1 $\boxed{(a+b)^n}$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1\\
(a+b)^1 &= 1a + 1b\\
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\
&= aa + ab + ba + bb\\
&= 1a^2 + 2ab + 1b^2\\
(a+b)^3 &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\
&= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\\
(a+b)^4 &= (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)\\
&= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4\\
&= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^2 + 1b^4\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Vidíme, že červené koeficinty jsou hodnoty získané z Pascalova trojúhelníku:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
&&&&1&&&&\\
&&&1&&1&&&\\
&&1&&2&&1&&\\
&1&&3&&3&&1&\\
1&&4&&6&&4&&1\\
&&&&\vdots&&&&
\end{array}
$$




Obrázek 1: $(a+b)(a+b)\ldots(a+b)$

Kde se tu bere Pascalův trojúhelník? No máme-li třeba určit $(a+b)^2$, musíme roznásobit závorky $(a+b)(a+b)$. Je třeba násobit postupně každý člen z první závorky s každým členem z druhé závorky. Tedy člen $a$ z první závorky vynásobíme nejprve členem $a$ z druhé závorky a potom také členem $b$ z druhé závorky. Stejně tak člen $b$ z první závorky vynásobíme nejprve členem $a$ z druhé závorky a potom také členem $b$ z druhé závorky. Obdobně postupujeme při výpočtu $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ atd. Tento aloritmus lze názorně zakreslit do schematu[1] v obrázku 1. Modrou šipkou jdoucí vlevo je znázorněno násobení členem $a$ a červenou šipkou jdoucí vpravo násobení členem $b$. Přitom shodné součiny (např. $ab$ a $ba$) seskupujeme do rámečků a nad to si zapisujeme jejich počty. Vidíme, že vskutku vzniká zákonitě Pascalův trojúhelník, ve kterém následující číslo vzniká součtem dvojice čísel, které jsou nad ním.

Ve schematu je pěkně vidět, proč existují například tři součiny typu $a^2b$, tedy součiny $aab, aba, baa$. Je to proto, že když cestuji z nevyššího černého bodu schematu (nultý řádek) do bodu označeného levou trojkou (třetí řádek trojúhelníku), mohu se tam dostat *třemi* cestami: $[M, M, C]$, $[M, C, M]$ a $[C, M, M]$. ($M$ značí modrou a $C$ červenou šipku). Cesty z nejvyššího bodu do bodů ležících na třetím řádku (body 1,3,3,1) se skládají ze tří úseků, kdy na každém ze tří křižovatek volím buď modrou, nebo červenou šipku. Chci-li se dostat do levé trojky, musím jak vidno *právě jednu* z šipek zvolit červenou. To mohu udělat celkem na třech křižovatkách, takže potřebuji vybrat jednu křižovatku ze tří, na které zvolím červenou šipku. Počet těchto voleb je dán kombinačním číslem $\binom{3}{1}$ – vybírám jednu křižovatku ze tří. No a krásně nám to vychází, páč $\binom{3}{1} = 3$.

[1]Viz aplet v GeoGebře https://ggbm.at/eynpgEgu

Podobně chci-li se dostat do pravé trojky, mohu se tam dostat *třemi* cestami: $[M, C, C]$, $[C, M, C]$ a $[C, C, M]$. Zde potřebuji vybrat dvě ze tří křižovatek, kde odbočím na červenou šipku. To lze udělat $\binom{3}{2}$ způsoby. A dostanu $\binom{3}{2} = 3$, což je opět OK!

Vidíme, že Pascalův trojúhelník je tvořen kombinačními čísly, které určují počty cest vedoucích do daného bodu trojúhelníku z jeho vrcholu.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Tato interpretace $PT$ pomocí počtu cest je názorně reprezentována např. pomocí Galtonovy desky.

Nyní můžeme vztah pro $(a + b)^n$ napsat obecně pro libovolné přirozené $n$ a libovolná reálná $a$,$b$ (Binomická věta):

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n}$$

Tato věta se dá snadno dokázat matematickou indukcí, s využitím vztahu

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

To je vztah vyjadřující vlastně rekurentní postup tvorby $PT$. Důkaz Binomické věty si udělej prosim tě sama.

Vztahy pro $n = 1$ a $n = 2$ je nutné znát zpaměti:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \tag{1}$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3} \tag{2}$$

Pro vyšší mocniny není problém vzorec vymyslet, páč víme, že koeficienty jednotlivých členů ve vzorci jsou pro $n$-tou mocninu čísla v $n$-tém řádku $PT$.

Ten si snadno vyrobíme, nebo si spočítáme příslušná kombinační čísla. No a exponenty u členů $a$ mají sestupnou a u členů $b$ vzestupnou tendenci, takže není problém vzorec napsat, i když si ho nepamatuješ, right?

Vzorce $(a+b)^2$ a $(a+b)^3$ se dají pěkně ilustrovat geometricky – viz obrázek z wikipedie.

## 2 $\boxed{a^n - b^n}$

Tak hele, každý blbec asi zná vztah

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)} \tag{3}$$

O jeho platnosti se můžeme přesvědčit pouhým roznásobením závorek. Méně známý je už vztah pro $n = 3$. Mohli bychom jej nějak vymyslet na základě analogie s $n = 2$? Může nás napadnout, že vztah by mohl vypadat podobně:

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \text{něco}$$

Potom by platilo:

$$\text{něco} = \frac{a^3 - b^3}{a - b} \tag{4}$$

Zkusíme tedy vydělit polynom $a^3 - b^3$ polynomem $a - b$:

$$\begin{aligned}
&(a^3 - b^3) : (a-b) = a^2 + ab + b^2 \\
-&(a^3 - a^2 b) \\
&-----\\
&(a^2 b - b^3) \\
-&(a^2 b - ab^2) \\
&-----\\
&(ab^2 - b^3) \\
-&(ab^2 - b^3) \\
&-----\\
&\text{zbytek } 0
\end{aligned}$$

A vida! Vyšlo to beze zbytku, takže jsme objevili vztah

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Podobně bychom dostali vztahy pro další mocniny:

$$a^1 - b^1 = (a-b) \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b)\\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2)\\
a^4 - b^4 &= (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\\
a^5 - b^5 &= (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)\\
a^6 - b^6 &= (a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+a^1b^4+b^5)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Pomocí matematické indukce bychom snadno dostali obecný vztah pro libovolné přirozené $n$:

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)} \qquad (6)$$

Vztah se dá však dokázat také pouhým roznásobením pravé strany:

$$
\begin{aligned}
P = a&\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right) -\\
&- b\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right) =\\
&= a^n + \cancel{a^{n-1}b} + \cancel{a^{n-2}b^2} + \ldots + \cancel{a^2b^{n-2}} + \cancel{ab^{n-1}} -\\
&- \cancel{a^{n-1}b} - \cancel{a^{n-2}b^2} - \ldots - \cancel{a^2b^{n-2}} - \cancel{ab^{n-1}} - b^n =\\
&= a^n - b^n \quad \square
\end{aligned}
$$

*Poznámka:* Tento vztah úzce souvisí s Binetovým vzorcem pro výpočet $n$-tého členu Fibonacciho posloupnosti i s obdobnými vzorci pro další kovové posloupnosti.

Specielně pro $b = 1$ máme často používané vztahy:

$$
\begin{aligned}
a^1 - 1 &= (a-1)\\
a^2 - 1 &= (a-1)(a+1)\\
a^3 - 1 &= (a-1)(a^2+a+1)\\
a^4 - 1 &= (a-b)(a^3+a^2+a+1)\\
a^5 - 1 &= (a-b)(a^4+a^3+a^2+a+1)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

čiliž obecně

$$\boxed{a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a+1\right)} \qquad (7)$$

respektive

$$\boxed{a^n - 1 = (a-1)\left(1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{n-1}\right)} \qquad (8)$$

Tento vztah se dá krásně použít pro vyvození vztahu pro součet prvních $n$ členů geometrické posloupnosti!

Vztahy pro $n = 2$ a $n = 3$ se dají ilustrovat geometricky – viz

- https://www.youtube.com/watch?v=24gWbMSEVVw
- https://www.youtube.com/watch?v=9RHJt0GXLcY

Ještě si uvědomíme jednu věc. Pro sudé $n$ počínaje $n = 4$ můžeme rozklad udělat i takto

$$
\begin{aligned}
a^4 - b^4 &= (a^2)^2 - (b^2)^2 \\
&= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \\
&= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) \qquad (9) \\
a^6 - b^6 &= (a^3)^2 - (b^3)^2 \\
&= (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) \\
&= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^3 + b^3) \qquad (10) \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Pročež vidíme, že druhé závorky ve vztazích (5) se dají ještě rozložit. To by ovšem šlo udělat i vytýkáním. V dalším uvidíme, že výrazy $a^n + b^n$ v (9) a (10) půjdou pro liché $n$ ještě rozložit.

# 3 $\boxed{a^n + b^n}$

Vezměmež vztahy (5) a udělejmež substituci $b \to -b$

$$
\begin{aligned}
a^1 + b^1 &= (a + b) \qquad (11) \\
a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\
a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\
a^4 - b^4 &= (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) \\
a^5 + b^5 &= (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\
a^6 - b^6 &= (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + a^1b^4 - b^5) \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Vidíme, že pro sudé mocniny nedostáváme nic nového, jsou to opět vztahy (5) – u rozkladu $a^2 - b^2$ je pouze prohozené pořadí závorek a u $a^2 - b^2$ $a^4 - b^4$ a $a^6 - b^6$ vhodným vytknutím v druhé závorce dostaneme vztahy (9) a (10).

Zato pro liché mocniny jsme dostali pěkné rozklady. Nyní vidíme, že pomocí vztahu pro $a^3 + b^3$ můžeme dokončit rozklad (10) pro šestou mocninu:

$$a^6 - b^6 = (a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) \tag{12}$$

Vzniká otázka, jak budou vypadat vzorce pro součet sudých mocnin. Začněmež $a^2+b^2$. Bohužel kužel je tento dvojčlen nerozložitelný, jak se snadno přesvědčíme vydělením. Pokud by se dal rozložit na součin, musel by jeden člen rozkladu být polynom prvního stupně ve tvaru $pa + qb$, kde $p, q$ jsou nějaké reálné (nenulové) konstanty. Zkusíme vydělit:

$$
\begin{aligned}
& (a^2+b^2) : (pa+qb) = \frac{1}{p}a - \frac{q}{p^2}b \\
-& \left(a^2 + \frac{q}{p}ab\right) \\
& ------ \\
& \left(-\frac{q}{p}ab + b^2\right) \\
-& \left(-\frac{q}{p}ab - \frac{q^2}{p^2}b^2\right) \\
& ------ \\
& \frac{q^2}{p^2}b^2 + b^2 \to \text{ což je nenulový zbytek, pač } b \neq 0
\end{aligned}
$$

Ukázali jsme tedy, že $a^2 + b^2$ je pro všechna reálná $a, b \neq 0$ nerozložitelné.

Tím pádem je ale nerozložitelné rovněž $a^4 + b^4$, pač

$$a^4 + b^4 = \left(a^2\right)^2 + \left(b^2\right)^2$$

Obecně je tedy nerozložitelný každý případ, kdy exponent je mocninou dvou, tedy mocniny $2, 4, 8, 16, 32 \ldots$

Nyní zbývají sudé mocniny, které nejsou mocninou dvou. První z nich je $n = 6$:

$$a^6 + b^6 = \left(a^2\right)^3 + \left(b^2\right)^3 \tag{13}$$

Použijeme vztah (11) pro součet třetích mocnin a po úpravě dostáváme:

$$a^6 + b^6 = (a^2+b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) \tag{14}$$

Obdobně rozložíme další sudé mocniny, které nejsou mocninou dvou. Například

$$a^{10} + b^{10} = \left(a^2\right)^5 + \left(b^2\right)^5 \tag{15}$$

$$= \left(a^2+b^2\right)\left(a^8-a^6b^2+a^4b^4-a^2b^6+b^8\right) \tag{16}$$

Vraťme se ještě k lichým mocninám, takže

$$\begin{aligned}
a^2+b^2 &= \text{ nelze} \\
a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \\
a^4+b^4 &= \text{ nelze} \\
a^5+b^5 &= (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4) \\
a^6+b^6 &= (a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4) \\
a^7+b^7 &= (a+b)\left(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6\right) \\
a^8+b^8 &= \text{ nelze} \\
a^9+b^9 &= (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\left(a^6-a^3b^3+b^6\right) \\
a^{10}+b^{10} &= \left(a^2+b^2\right)\left(a^8-a^6b^2+a^4b^4-a^2b^6+b^8\right) \\
a^{11}+b^{11} &= (a+b)\,(a^{10}-a^9b+a^8b^2-a^7b^3+a^6b^4-a^5b^5+a^4b^6-a^3b^7 \\
&\quad +a^2b^8-ab^9+b^{10}) \\
a^{12}+b^{12} &= \left(a^4+b^4\right)\left(a^8-a^4b^4+b^8\right) \\
a^{13}+b^{13} &= (a+b)\,(a^{12}-a^{11}b+a^{10}b^2-a^9b^3+a^8b^4-a^7b^5+a^6b^6-a^5b^7 \\
&\quad +a^4b^8-a^3b^9+a^2b^{10}-ab^{11}+b^{12}) \\
a^{14}+b^{14} &= \left(a^2+b^2\right)\left(a^{12}-a^{10}b^2+a^8b^4-a^6b^6+a^4b^8-a^2b^{10}+b^{12}\right) \\
a^{15}+b^{15} &= (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)\cdot \\
&\quad \cdot\left(a^8+a^7b-a^5b^3-a^4b^4-a^3b^5+ab^7+b^8\right) \\
a^{16}+b^{16} &= \text{ nelze} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Vidíme, že o počtu členů v rozkladu rozhoduje prvočíselný rozklad mocniny $n$:

1. $n = 2^k \rightarrow$ nelze rozložit
2. $n$ je prvočíslo různé od 2 (3,5,7,11...) $\rightarrow$ 2 členy
3. $n$ je součin dvou prvočísel $(15 = 3 \cdot 5) \rightarrow 2 \cdot 2 = 4$ členy
4. obecně $n$ je součin $m$ prvočísel $\rightarrow 2^m$ členů (např. $n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \rightarrow 2^3 = 8$ členů)
5. $n$ je druhá mocnina prvočísla $\rightarrow$ 3 členy (např. $n = 9 = 3^2$)

6. $n$ je třetí mocnina prvočísla $\rightarrow$ 4 členy (např. $n = 5^3 = 125$)
7. obecně $n$ je $k$-tá mocnina prvočísla $\rightarrow$ $(k+1)$ členů