

O aproximare a lungimii spiralei de pe tor

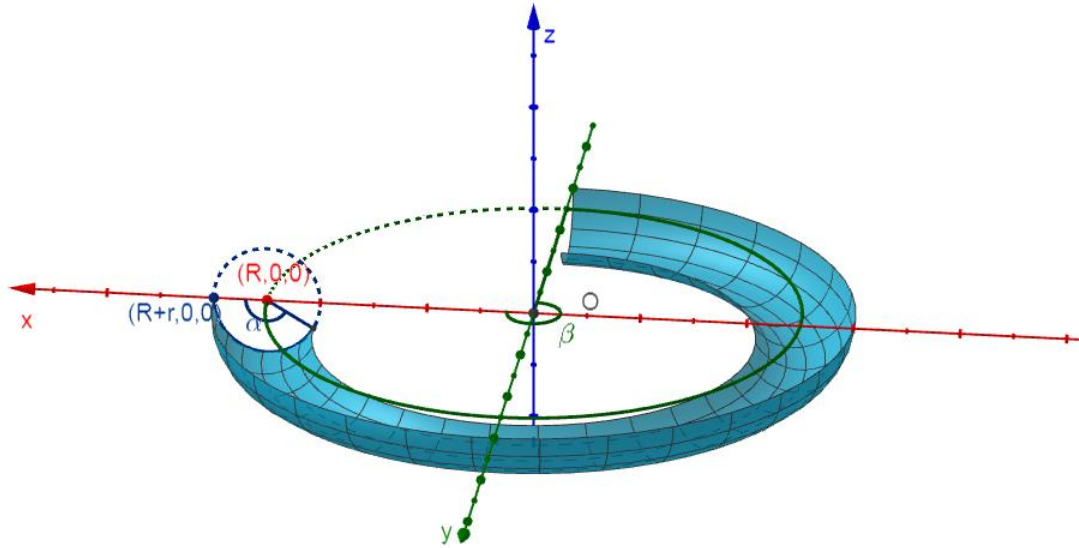


Fig.1 Generarea parțială a torului cu $R = 5, r = 1$. $\alpha = 150^\circ, \beta = 270^\circ$

Ecuțiile parametrice ale torului:

$$\begin{cases} x = (R + r \cos(\alpha)) \cos(\beta) \\ y = (R + r \cos(\alpha)) \sin(\beta), \text{ cu } \begin{cases} \alpha \in [0, 2\pi] \\ \beta \in [0, 2\pi] \end{cases} \\ z = -r \sin(\alpha) \end{cases} \quad (1)$$

Ecuțiile parametrice ale **zonei interioare** a torului:

$$\begin{cases} x = (R + r \cos(\alpha)) \cos(\beta) \\ y = (R + r \cos(\alpha)) \sin(\beta), \text{ cu } \begin{cases} \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \\ \beta \in [0, 2\pi] \end{cases} \\ z = -r \sin(\alpha) \end{cases} \quad (2)$$

Ecuțiile parametrice ale **zonei exterioare** a torului:

$$\begin{cases} x = (R + r \cos(\alpha)) \cos(\beta) \\ y = (R + r \cos(\alpha)) \sin(\beta), \text{ cu } \begin{cases} \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \\ \beta \in [0, 2\pi] \end{cases} \\ z = -r \sin(\alpha) \end{cases} \quad (3)$$

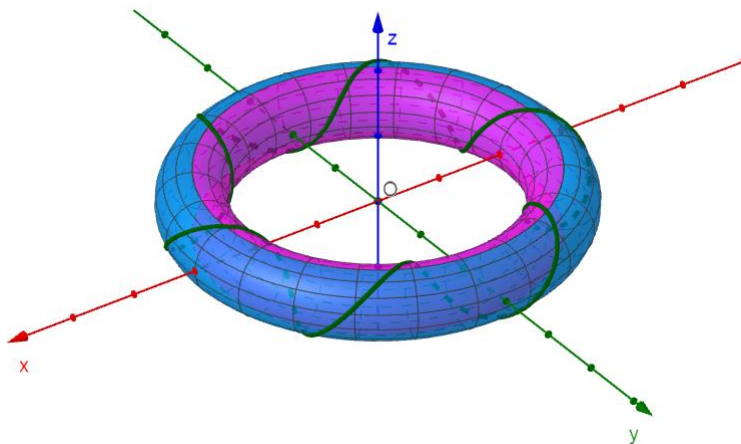


Fig.2 Tor cu spirală. $R = 5, r = 1, u = 360^\circ, n = 6$

Ecuatiile parametrice ale spiralei cu $n \in \mathbb{N}^*$ spire, de pe suprafața torului:

$$\begin{cases} x = \left(R - r \sin\left(2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u}\right) \right) \cdot \cos(\varphi) \\ y = \left(R - r \sin\left(2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u}\right) \right) \cdot \sin(\varphi) \text{ cu } \varphi \in [0, u]. \\ z = r \cos\left(2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u}\right) \end{cases} \quad (4)$$

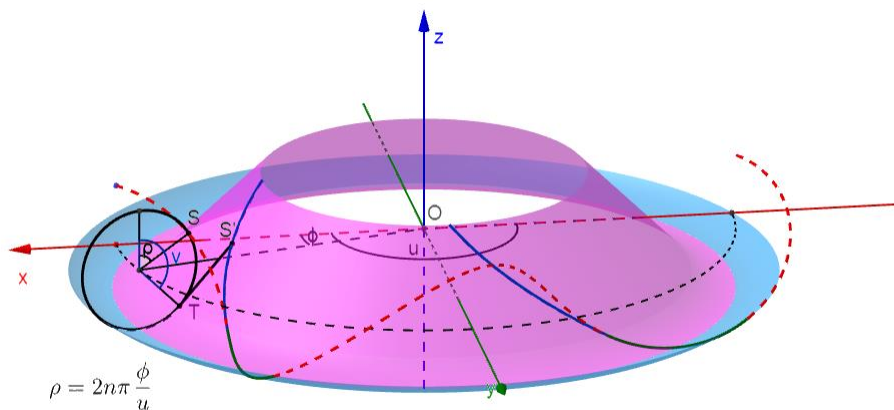


Fig. 3 Desfășurarea parțială a zonei interioare a torului cu spirală. $R = 5, r = 1, u = 180^\circ, n = 2, v = 135^\circ$

Ecuatiile parametrice ale curbei corespunzătoare porțiunii primei spire, situate pe zona *interioară* de pe suprafața torului ($v \in [0, \pi], n \in \mathbb{N}^*$):

$$\begin{cases} x = \left(R - r \sin(v) + r \left(v - 2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u} \right) \cos(v) \right) \cos(\varphi) \\ y = \left(R - r \sin(v) + r \left(v - 2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u} \right) \cos(v) \right) \sin(\varphi), \text{ cu } \varphi \in \left[0, \frac{v}{2\pi} \cdot \frac{u}{n} \right] \\ z = r \cos(v) + r \left(v - 2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u} \right) \sin(v) \end{cases} \quad (5)$$

Ecuatiile parametrice ale curbei corespunzătoare porțiunii primei spire, situate pe zona *exterioară* de pe suprafața torului ($v \in [0, \pi]$):

$$\begin{cases} x = \left(R - r \sin(2\pi - v) + r \left(2\pi - v - 2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u} \right) \cos(2\pi - v) \right) \cos(\varphi) \\ y = \left(R - r \sin(2\pi - v) + r \left(2\pi - v - 2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u} \right) \cos(2\pi - v) \right) \sin(\varphi), \\ z = r \cos(2\pi - v) + r \left(2\pi - v - 2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u} \right) \sin(2\pi - v) \end{cases}$$

$$\text{cu } \varphi \in \left[\left(1 - \frac{v}{2\pi} \right) \cdot \frac{u}{n}, \frac{u}{n} \right]. \quad (6)$$

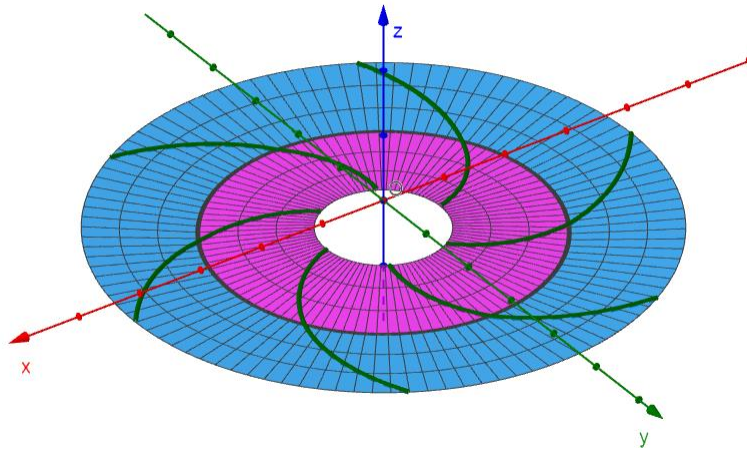


Fig. 4 Desfășurarea torului circular cu spirală pe planul $z = -r$

Ecuatiile parametrice ale curbei corespunzătoare primei spire, din planul de ecuație $z = -r$ ($\Leftrightarrow v = \pi$):

$$\begin{cases} x = \left(R - r \left(\pi - 2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u} \right) \right) \cos(\varphi) \\ y = \left(R - r \left(\pi - 2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u} \right) \right) \sin(\varphi) \end{cases}, \text{ cu } \varphi \in \left[0, \frac{u}{n} \right]. \quad (7)$$

Calculul unei aproximări a lungimii spiralei de pe tor

Prin diferențierea ecuațiilor parametrice ale spiralei de pe suprafața torului se obțin următoarele relații:

$$\begin{cases} dx = \left(-\frac{2n\pi}{u} r \cos\left(2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u}\right) \cdot \cos(\varphi) - \left(R - r \sin\left(2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u}\right) \right) \cdot \sin(\varphi) \right) d\varphi \\ dy = \left(-\frac{2n\pi}{u} r \cos\left(2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u}\right) \cdot \sin(\varphi) + \left(R - r \sin\left(2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u}\right) \right) \cdot \cos(\varphi) \right) d\varphi \\ dz = -\frac{2n\pi}{u} r \sin\left(2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u}\right) d\varphi \end{cases} \quad (8)$$

Înlocuind relațiile precedente în formula lungimii arcului elementar al unei curbe,

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2},$$

se obține expresia lungimii arcului elementar al spiralei de pe suprafața torului,

$$ds = \sqrt{\left(\frac{2n\pi}{u} r\right)^2 + \left(R - r \sin\left(2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u}\right)\right)^2} d\varphi. \quad (9)$$

Lungimea spiralei cu $n \in \mathbb{N}^*$ spire, de pe tor are expresia

$$\mathcal{L} = \int_0^u \sqrt{\left(\frac{2n\pi}{u} r\right)^2 + \left(R - r \sin\left(2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u}\right)\right)^2} d\varphi. \quad (10)$$

Prin diferențierea ecuațiilor parametrice ale curbei corespunzătoare primei spire, din planul de ecuație $z = -r$, se obțin următoarele relații:

$$\begin{cases} dx = \left(\frac{2n\pi}{u} r \cos(\varphi) - \left(R - r \left(\pi - 2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u} \right) \right) \sin(\varphi) \right) d\varphi \\ dy = \left(\frac{2n\pi}{u} r \sin(\varphi) + \left(R - r \left(\pi - 2n\pi \cdot \frac{\varphi}{u} \right) \right) \cos(\varphi) \right) d\varphi \end{cases} \quad (11),$$

care se pot rescrie sub forma:

$$\begin{cases} dx = \left(\frac{2n\pi}{u} r \cos(\varphi) - \left(\frac{2n\pi r}{u} \cdot \varphi + R - \pi r \right) \sin(\varphi) \right) d\varphi \\ dy = \left(\frac{2n\pi}{u} r \sin(\varphi) + \left(\frac{2n\pi r}{u} \cdot \varphi + R - \pi r \right) \cos(\varphi) \right) d\varphi \end{cases} \quad (11')$$

Expresia lungimii arcului elementar al curbei corespunzătoare primei spire de pe suprafața torului este

$$ds = \sqrt{\left(\frac{2n\pi r}{u} \cdot \varphi + R - \pi r\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{u} r\right)^2} d\varphi. \quad (12)$$

Lungimea curbei corespunzătoare primei spire de pe suprafața torului se poate calcula cu ajutorul formulei

$$\ell_s = \int_0^{\frac{u}{n}} \sqrt{\left(\frac{2n\pi r}{u} \cdot \varphi + R - \pi r\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{u} r\right)^2} d\varphi. \quad (13)$$

Lungimea totală a familiei de curbe corespunzătoare spiralei cu $n \in \mathbb{N}^*$ spire, de pe tor se poate calcula cu ajutorul formulei

$$\mathcal{L} = n \int_0^{\frac{u}{n}} \sqrt{\left(\frac{2n\pi r}{u} \cdot \varphi + R - \pi r\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{u} r\right)^2} d\varphi. \quad (13)$$

Calculul integralei din membrul drept al formulei precedente se poate efectua făcând schimbarea de variabilă

$$\psi(\varphi) = \frac{2n\pi r}{u} \cdot \varphi + R - \pi r. \quad (14)$$

Se obține

$$\mathcal{L} = \frac{u}{2\pi r} \int_{R-\pi r}^{R+\pi r} \sqrt{\psi^2 + \left(\frac{2n\pi}{u} r\right)^2} d\psi. \quad (15)$$

Se aplică formula

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right) \quad (16)$$

și rezultă

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \frac{u}{4\pi r} & \left((R + \pi r) \sqrt{(R + \pi r)^2 + \left(\frac{2n\pi}{u} r\right)^2} - (R - \pi r) \sqrt{(R - \pi r)^2 + \left(\frac{2n\pi}{u} r\right)^2} \right. \\
& \left. + \left(\frac{2n\pi}{u} r\right)^2 \ln \left(\frac{R + \pi r + \sqrt{(R + \pi r)^2 + \left(\frac{2n\pi}{u} r\right)^2}}{R - \pi r + \sqrt{(R - \pi r)^2 + \left(\frac{2n\pi}{u} r\right)^2}} \right) \right). \quad (17)
\end{aligned}$$