„Beweise der vier klassischen besonderen Punkte im Dreieck“

Definition Mittelsenkrechte. Eine Gerade heißt Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$ der Strecke $\overline{AB}$, wenn sie durch den Mittelpunkt der Strecke geht und zu ihr senkrecht ist.
Ein Punkt P liegt genau dann auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, wenn gilt $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$.

Definition Winkelhalbierende. Eine Gerade heißt Winkelhalbierende w_α des Winkels α, wenn sie den Winkel α halbiert.
Alle Punkte, die von beiden Schenkeln eines gegebenen Winkels α den gleichen Abstand haben, liegen auf der Winkelhalbierenden w_α.

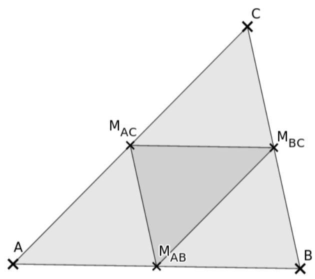
Definition Seitenhalbierende. Seitenhalbierende sind diejenigen Strecken, die die Dreiecksecken mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seite verbinden.

Definition Höhe eines Dreiecks. Die Höhe eines Dreiecks ist die orthogonale Strecke von einer Seite zur gegenüberliegenden Ecke. In einem Dreieck gibt es drei Höhen.

Definition Mittendreieck. Das Dreieck, das entsteht, wenn man die drei Seitenmitten eines Dreiecks miteinander verbindet, heißt Mittendreieck.

Eigenschaften eines Mittendreiecks.

- Das Dreieck ABC und dessen Mittendreieck $M_{AB}M_{BC}M_{AC}$ sind ähnlich.
- Zu jedem Dreieck ABC gibt es eine parallele Seite im Dreieck $M_{AB}M_{BC}M_{AC}$. Diese heißt Mittenparallele und ist genau halb so lang.
- Die Höhen des Dreiecks $M_{AB}M_{BC}M_{AC}$ liegen auf der Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC.



Beweis zum Umkreismittelpunkt

1. Im ersten Schritt wird die Mittelsenkrechte m_c von A und B gezeichnet. Was gilt für jeden Punkt P_1 auf der Mittelsenkrechten m_c? ____________________
2. Ebenso gilt für jeden Punkt P_2 auf der Mittelsenkrechten m_a: ____________________
3. Für den Schnittpunkt U von m_a und m_c gilt ____________________________.
4. Für U gilt also insbesondere ____________________. Deswegen muss U auch auf ___, der Mittelsenkrechten von A und C liegen.
5. U ist also von den ________________________ A, B und C gleich weit entfernt. Man kann nun den ________________ des Dreiecks zeichnen. Welchen Radius besitzt dieser? ____________________________

Beweis zum Höhenschnittpunkt

1. Zeichnet man zu jeder Seite a, b und c die Parallele durch den jeweiligen Eckpunkt A, B und C, erhält man das Dreieck XYZ. ABC ist dann das ______________________________ von XYZ.

2. Die Mittelsenkrechte m_x von Y und Z geht durch den Mittelpunkt _____ von x. Sie ist außerdem orthogonal zu _____ und damit auch zur Parallelen _____. m_x erfüllt also genau die Eigenschaften der Höhe h_c. Die Höhe von C entspricht also der ______________________________.

3. Ebenso entspricht die Mittelsenkrechte m_z der _________________________ und die Mittelsenkrechte m_y der _________________________.

4. Der Umkreismittelpunkt von XYZ entspricht also dem _________________________ des ____________________ ABC. Die Höhen besitzen daher aus dem gleichen Grund wie die Mittelsenkrechten genau einen Schnittpunkt.

Beweis zum Inkreismittelpunkt

1. Im ersten Schritt wird ______________________________ w_α von A gezeichnet. Was gilt für jeden Punkt P_1 auf der Winkelhalbierenden w_α? ______________________________
   ____

2. Ebenso hat jeder Punkt P_2 auf der Winkelhalbierenden w_β ______________________________
   ____

3. Der Schnittpunkt I von w_α und w_β hat also ______________________________.

4. Insbesondere hat I auch ______________________________. Daher muss I auch auf w_γ, der ______________________________ liegen.

5. I ist dann von allen drei _________________________ des Dreiecks gleich weit entfernt. Man kann nun durch die Lote den ____________________ des Dreiecks zeichnen.

Beweis zum Schwerpunkt

1. Im ersten Schritt spiegelt man die _________________________ $\overline{M_aM_b}$ des Dreiecks ABC an S. Es gilt:
   - $|\overline{M_a'M_b'}|$ = _______________ = _______________ und
   - _______________ $\|$ _______________ $\|$ _______________.

2. $\overline{M_a'M_b'}$ ist folglich die _________________________ des Dreiecks ABS. Deshalb gilt: $|\overline{AM_b'}|$ = _______________ = _______________ und $2 \cdot |\overline{M_aS}|$ = _______________.

3. Die Seitenhalbierende s_b teilt s_a also im Verhältnis __________.

4. Ebenso zeigt man, dass s_b auch die ______________________________ im Verhältnis $1 : 2$ teilt.

5. Die Seitenhalbierende s_a wird daher von s_c in demselben ____________________ geschnitten.