

8. Produktregel

Um Funktionen aus zwei Faktoren abzuleiten, müssen wir aktuell das Produkt ausmultiplizieren, was umständlich und fehleranfällig ist. Es wäre wünschenswert eine direkte Formel zu finden:

$$\text{Sei } f: x \mapsto \underbrace{(x^2 + 1)}_{u(x)} \cdot \underbrace{(2x + 1)}_{v(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{ Hoffnung: } f': x &\mapsto u'(x) \cdot v'(x) \\ &= 2x \cdot 2 \\ &= 4x \end{aligned}$$

WIDERSPRUCH: Da f eine Funktion vom Grad 3 ist, muss f' den Grad 2 besitzen.

$$\begin{aligned} \text{ Korrekte Lösung: } f': x &\mapsto u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= 2x \cdot (2x+1) + (x^2+1) \cdot 2 \\ &= 4x^2 + 2x + 2x^2 + 2 \\ &= 6x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

MERKE

Besitzt eine Funktion die Form $f: x \mapsto u(x) \cdot v(x)$ mit differenzierbaren Funktionen $u(x) \cdot v(x)$, so hat sie die Ableitungsfunktion

$$f': x \mapsto u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

ACHTUNG

Aktuell erscheint die Produktregel nutzlos, da jedes Produkt generationaler Funktionen ausmultipliziert und berechnet werden kann, jedoch wird sie spätestens für Funktionen wie $x^2 \cdot \sin(x)$ oder $(2x+1) \cdot 2^x$ zwingend notwendig!