Costruzione dell'iperbole tramite stringhe

Metodo

Tale costruzione utilizza:

- un righello fisso OA;
- un righello OC in grado di ruotare attorno al punto O;
- una corda inestensibile con estremi fissati nei punti A e C.

Partendo dalla posizione in cui i due righelli sono sovrapposti, ruotare il righello OC tirando la corda nel punto $D \in OC$ in modo tale che poggi sul righello mobile il più possibile.
Se durante il movimento viene posta una matita nel punto D, si ottiene un'iperbole.

Costruzione tramite GeoGebra

1. Si costruiscano gli assi cartesiani e sia $O = (0, 0)$.
2. Si costruiscano gli slider a e b, con $0 < a < b$.
3. Siano $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$.
4. Si costruisca lo slider l della lunghezza della corda.
   $(b - a + 0.05 < l < b - a + 5)$
5. Sia $cos\alpha = \dfrac{a^2 + b^2 - l^2}{2ab}$ e sia $alpha = acosd(cos\alpha)$.
   ($acosd(x)$ permette di ottenere in gradi l'angolo il cui coseno è x)
6. Si costruisca lo slider β compreso tra $-alpha$ e $+alpha$.
7. Sia C tale che $B\hat{O}C = \beta$. (Strumento: angolo di data misura)
8. Si costruisca la retta OC.
9. Sia c il segmento $\overline{AC}$.
10. Sia $\gamma = A\hat{C}O$.
11. Sia $t = \dfrac{c^2 - l^2}{2(ccos(\gamma) - l)}$.
12. Si costruisca la circonferenza di centro C e raggio t. (Strumento: circonferenza- dati centro e raggio)
    Sia D il suo punto di intersezione con la retta OC e si renda attiva la sua traccia.
13. Si costruisca la spezzata aperta ADC.

Utilizzo

Si selezionino i valori di a, b ed l desiderati e si attivi l'animazione di β.
La curva così ottenuta è un'iperbole.

Osservazione

Per la costruzione è stato applicato il teorema di Pitagora generalizzato:

Sia $\triangle ABC$ un triangolo qualsiasi e sia α l'angolo tra $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Allora vale

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\,\overline{AC}\,cos\alpha$$

- Per calcolare l'ampiezza massima dell'angolo β è stato applicato il teorema al triangolo $\triangle OAC$ nel momento di apertura massima in cui $\overline{AC} = l$.
  Quindi: $l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\alpha$,
  da cui $cos\alpha = \dfrac{a^2 + b^2 - l^2}{2ab}$ e $\alpha = max\beta$.
- Per calcolare il tratto $\overline{DC}$ della corda che poggia sulla retta OC è stato applicato il teorema al triangolo $\triangle DAC$:
  - Siano $t = \overline{DC}$, $c = \overline{AC}$ e $\gamma = D\hat{C}A$.
  - $\overline{AD} + \overline{DC} = l \Rightarrow \overline{AD} = l - t$.
  - $\overline{AD}^2 = t^2 + c^2 - 2tc\,cos\gamma \Rightarrow (l - t)^2 = t^2 + c^2 - 2tc\,cos\gamma$.
  - Risolvendo l'equazione si ottiene $t = \dfrac{c^2 - l^2}{2(ccos\gamma - l)}$.