บทที่ 5
การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง

ทักษะในการแยกตัวประกอบของพหุนามเป็นอีกทักษะหนึ่งที่มีความสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง เรานำพหุนามดีกรีสองมาใช้จำลองความสัมพันธ์และปรากฏการณ์ที่สำคัญหลายอย่าง เช่น จำลองความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและความสูงในแนวดิ่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ภายใต้สนามโน้มถ่วงของโลก ด้วยสมการ $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + ut + d$ เมื่อ g แทนความเร่งโน้มถ่วงของโลก u แทนความเร็วเริ่มต้นของวัตถุ และ d แทนความสูงที่เวลาเริ่มต้น

การแยกตัวประกอบของพหุนามช่วยให้เราหาคำตอบของปัญหาที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เหล่านี้ได้ และยังช่วยให้มองเห็นภาพที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรได้ดียิ่งขึ้น

นักเรียนเคยรู้จักพหุนามและการหาผลบวก ผลลบ ผลคูณของพหุนาม รวมทั้งการหาผลหารของพหุนามด้วยเอกนามมาแล้ว ในบทนี้จะกล่าวถึงการแยกตัวประกอบของพหุนามซึ่งสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์และค่าคงตัวเป็นจำนวนเต็ม เช่น $4x^2 + 12x$, $4mn - 10m^2n^2$ และ $-y^2 + 7y - 10$

ให้นักเรียนพิจารณาการคูณของพหุนามต่อไปนี้

1. $2(x + 3) = 2x + 6$
2. $5x(x + 1) = 5x^2 + 5x$
3. $-x(3x - 4) = -3x^2 + 4x$
4. $5xy(x + 2y) = 5x^2y + 10xy^2$
5. $(x + 1)(x + 3) = x^2 + 4x + 3$
6. $(m + 4)(2m - 3) = 2m^2 + 5m - 12$
7. $4(x - 5)(x - 2) = 4x^2 - 28x + 40$

จากความสัมพันธ์ของการคูณและการหาร เราทราบมาแล้วว่า

ตัวตั้ง ÷ ตัวหาร = ผลหาร

หรือ

ตัวหาร x ผลหาร = ตัวตั้ง

จึงกล่าวได้ว่า พหุนามแต่ละตัวที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับ จะหารพหุนามที่อยู่ทางขวาได้ลงตัว เช่น

- 2 หาร $2x + 6$ ได้ลงตัว และมีผลหารเท่ากับ $x + 3$
- $x + 3$ หาร $2x + 6$ ได้ลงตัว และมีผลหารเท่ากับ 2

เราอาจเขียนผลคูณของพหุนามข้างต้นได้ใหม่โดยใช้สมบัติของการเท่ากันได้ดังนี้

1. $2x + 6 = 2(x + 3)$
2. $5x^2 + 5x = 5x(x + 1)$
3. $-3x^2 + 4x = -x(3x - 4)$
4. $5x^2y + 10xy^2 = 5xy(x + 2y)$
5. $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$
6. $2m^2 + 5m - 12 = (m + 4)(2m - 3)$
7. $4x^2 - 28x + 40 = 4(x - 5)(x - 2)$

ข้อสังเกต

การแยกตัวประกอบของพหุนามเป็นกระบวนการทำย้อนกลับของการคูณพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง

การเขียนพหุนามที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูปการคูณของพหุนามตั้งแต่สองพหุนามขึ้นไป โดยที่แต่ละพหุนามหารพหุนามที่กำหนดให้ได้ลงตัวดังข้างต้นเป็นตัวอย่างของ **การแยกตัวประกอบ (factorization)** ของพหุนามที่กำหนดให้

พิจารณาการแยกตัวประกอบของพหุนามจากตัวอย่างต่อไปนี้

มุมคณิต

ตัวประกอบของพหุนามใด คือ พหุนามที่หารพหุนามนั้นได้ลงตัว

1. $2x + 6 = 2(x + 3)$
   จะเห็นว่า $2x + 6$ เป็นพหุนามดีกรีหนึ่ง
   2 เป็นพหุนามดีกรีศูนย์
   และ $x + 3$ เป็นพหุนามดีกรีหนึ่งซึ่งเท่ากับดีกรีของ $2x + 6$

ทั้ง 2 และ $x + 3$ ต่างหาร $2x + 6$ ลงตัว เรียก 2 และ $x + 3$ ว่า **ตัวประกอบของ** $2x + 6$

2. $4x^2 - 28x + 40 = 4(x - 5)(x - 2)$
   จะเห็นว่า $4x^2 - 28x + 40$ เป็นพหุนามดีกรีสอง
   4 เป็นพหุนามดีกรีศูนย์
   $x - 5$ และ $x - 2$ ต่างเป็นพหุนามดีกรีหนึ่ง
   ซึ่ง 4, $x - 5$ และ $x - 2$ มีดีกรีต่ำกว่าดีกรีของ $4x^2 - 28x + 40$

4, $x - 5$ และ $x - 2$ เป็น **ตัวประกอบของ** $4x^2 - 28x + 40$

การเขียนพหุนามที่กำหนดให้ ในรูปการคูณกันของตัวประกอบของพหุนามตั้งแต่สองพหุนามขึ้นไป เรียกว่า **การแยกตัวประกอบของพหุนาม**

จากตัวอย่างข้อ 2 ถ้าเขียน $4x^2 - 28x + 40 = 4(x^2 - 7x + 10)$ ยังไม่ถือว่าเป็นการแยกตัวประกอบที่สมบูรณ์ของ $4x^2 - 28x + 40$ ทั้งนี้เพราะยังสามารถแยกตัวประกอบของ $x^2 - 7x + 10$ ได้อีกเป็น $x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$ ดังนั้น $4x^2 - 28x + 40 = 4(x - 5)(x - 2)$ จึงจะเป็นการแยกตัวประกอบที่สมบูรณ์

ในการแยกตัวประกอบของพหุนามซึ่งสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์และค่าคงตัวเป็น**จำนวนเต็ม** อาจทำโดยวิธีหนึ่งวิธีใดต่อไปนี้ หรือทั้งสองวิธีผสมกัน

1. ใช้สมบัติการแจกแจงโดยนำ ห.ร.ม. ของค่าสัมบูรณ์ของสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์ในพหุนามออกมาเป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของพหุนามที่กำหนดให้
2. เขียนพหุนามที่กำหนดให้ในรูปการคูณกันของพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่า จนกระทั่งไม่สามารถแยกตัวประกอบต่อไปได้อีก โดยที่พหุนามที่เป็นตัวประกอบนั้น มีสัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์และค่าคงตัวเป็นจำนวนเต็ม

5.1 การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง

สมบัติการแจกแจงกล่าวว่า ถ้า a, b และ c แทนจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว

$a(b + c) = ab + ac$ หรือ $(b + c)a = ba + ca$

เราอาจเขียนสมบัติการแจกแจงข้างต้นใหม่ เป็นดังนี้

$ab + ac = a(b + c)$ หรือ $ba + ca = (b + c)a$

ถ้า a, b และ c เป็นพหุนาม เราก็สามารถใช้สมบัติการแจกแจงข้างต้นได้ด้วย และเรียก a ว่า **ตัวประกอบร่วม** ของ ab และ ac หรือ**ตัวประกอบร่วม**ของ ba และ ca

พิจารณาวิธีการแยกตัวประกอบของ $6a^2b - 15ab^2$ โดยใช้สมบัติการแจกแจง ดังนี้

$$\begin{aligned} 6a^2b - 15ab^2 &= 3(2a^2b - 5ab^2) \\ &= 3 \times a \times (2ab - 5b^2) \\ &= 3 \times a \times b \times (2a - 5b) \\ &= 3ab(2a - 5b) \end{aligned}$$

ดังนั้น $6a^2b - 15ab^2 = 3ab(2a - 5b)$

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $5xy + 6x^2$

วิธีทำ $5xy + 6x^2 = x(5y + 6x)$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $12y^2z - 20yz$

วิธีทำ $12y^2z - 20yz = 4yz(3y - 5)$

123 | มุมคณิต

จากที่นักเรียนเคยเรียนเรื่องการแยกตัวประกอบของจำนวนนับมาแล้ว โดยหาตัวประกอบร่วมที่มากที่สุดหรือตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของจำนวนนับที่กำหนดให้ เราสามารถขยายแนวคิดนี้ ไปสู่การแยกตัวประกอบของพหุนามได้

นักเรียนอาจเริ่มต้นทำความเข้าใจเกี่ยวกับการหาตัวประกอบร่วมของพหุนาม $6a^2b - 15ab^2$ ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} 6a^2b &= 2 \times \boxed{3} \times \boxed{a} \times a \times \boxed{b} \\ 15ab^2 &= \boxed{3} \times 5 \times \boxed{a} \times b \times \boxed{b} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ตัวประกอบร่วมที่มีดีกรีมากที่สุด ของ $6a^2b$ และ $15ab^2$ คือ 3ab

ในการแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีหลายพจน์ นอกจากจะใช้สมบัติการแจกแจงแล้ว อาจต้องใช้สมบัติการสลับที่ หรือ สมบัติการเปลี่ยนหมู่ประกอบด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $ab - 2ac + bc - 2c^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} ab - 2ac + bc - 2c^2 &= (ab - 2ac) + (bc - 2c^2) \\ &= a(b - 2c) + c(b - 2c) \\ &= (b - 2c)(a + c) \end{aligned}$$

$b - 2c$ เป็นตัวประกอบร่วม

ดังนั้น $ab - 2ac + bc - 2c^2 = (b - 2c)(a + c)$

เพื่อน ๆ อาจจับคู่อีกแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$\begin{aligned} ab - 2ac + bc - 2c^2 &= ab + bc - 2ac - 2c^2 \\ &= (ab + bc) - (2ac + 2c^2) \\ &= b(a + c) - 2c(a + c) \\ &= (a + c)(b - 2c) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $5x^2z - 3y + 5yz - 3x^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 5x^2z - 3y + 5yz - 3x^2 &= 5x^2z - 3x^2 + 5yz - 3y \\ &= (5x^2z - 3x^2) + (5yz - 3y) \\ &= x^2(5z - 3) + y(5z - 3) \\ &= (5z - 3)(x^2 + y) \end{aligned}$$

$5z - 3$ เป็นตัวประกอบร่วม

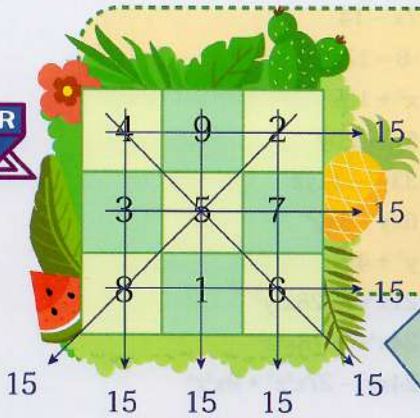
ดังนั้น $5x^2z - 3y + 5yz - 3x^2 = (5z - 3)(x^2 + y)$

เพื่อน ๆ อาจจับคู่อีกแบบหนึ่งได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 5x^2z - 3y + 5yz - 3x^2 &= 5x^2z + 5yz - 3x^2 - 3y \\ &= (5x^2z + 5yz) - (3x^2 + 3y) \\ &= 5z(x^2 + y) - 3(x^2 + y) \\ &= (x^2 + y)(5z - 3) \end{aligned}$$

ชวนคิด 5.1

AR



จัตุรัสกลปรกติ (normal magic square) เป็นตารางที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน เมื่อเติมจำนวนนับที่เรียงติดกัน ซึ่งเริ่มตั้งแต่ 1 ลงในช่องของตาราง โดยจำนวนในแต่ละช่องต้องไม่ซ้ำกัน แล้วทำให้ผลบวกของจำนวนในแต่ละแถว ผลบวกของจำนวนในแต่ละหลัก และผลบวกของจำนวนในแต่ละแนวของเส้นทแยงมุม เท่ากันทั้งหมด เราจะเรียกผลบวกที่เท่ากันนั้นว่า "ค่ากล"

ตัวอย่างของจัตุรัสกลปรกติ ขนาด 3 × 3 ซึ่งมีค่ากล เป็น 15

ถ้าเรามีจัตุรัสกลปรกติขนาด 4 × 4 แบบนี้ ก่อนที่เราจะเติมจำนวน 1-16 ลงไป เราควรหาค่ากลให้ได้ก่อน ข้าวปั้นเห็นด้วยไหมจ๊ะ

เห็นด้วยจ้ะข้าวหอม เราจะได้รู้ว่าผลบวกของจำนวนในแต่ละแถว แต่ละหลัก แต่ละแนวของเส้นทแยงมุมเป็นเท่าไร ว่าแต่ว่า...เราจะหาค่ากลของจัตุรัสกลปรกติขนาด 4 × 4 มาได้อย่างไรกันนะ

เพื่อน ๆ ช่วยพวกเราคิดหน่อยนะครับ

นั่นน่ะสิ เพื่อน ๆ ช่วยกันตอบคำถามต่อไปนี้หน่อยนะคะ

1. ถ้าต้องการหาค่ากลของจัตุรัสกลปรกติ ขนาด 4 × 4 ใด ๆ จะสามารถหาได้อย่างไร และค่ากลนั้นมีค่าเป็นเท่าไร
2. ถ้าต้องการหาค่ากลของจัตุรัสกลปรกติ ขนาด n × n ใด ๆ จะสามารถหาได้อย่างไร และค่ากลนั้นมีค่าเป็นเท่าไร
3. ถ้าต้องการสร้างจัตุรัสกลปรกติ ที่มีค่ากลเป็น 369 จะต้องใช้ตารางขนาดเท่าใด

มุมเทคโนโลยี

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เข้าไปศึกษาแนวคิดในการหาคำตอบ ได้ที่ http://ipst.me/9157

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $10x + 4$
2) $7x - 14$
3) $-9x + 3$
4) $-8 - 12x$
5) $14y + 26z$
6) $x^2 + 13x$
7) $3z^2 - 2z$
8) $5y^2 - 20y$
9) $12xz - 16z$
10) $33y^2 - 11yz$
11) $15x^2y + 5x$
12) $6xy - 8xy^2$
13) $x^3 + x$
14) $y^3 + 4y$
15) $9y^2z^2 - 6yz$
16) $21x^3y^2 - 28x^2y^3$
17) $-7x^2z^3 + 63xz^5$
18) $24x^4z^2 + 18x^3z^3$
19) $30x^2y^3 + 36x^3y^2 - 6x^3y^3$
20) $24xz^2 - 27x^2z^3 + 9x^3z^4$

2. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1) $m(n + 3) + 5(n + 3)$
2) $(x + y)z - (x + y)$
3) $4t(a + b) - s(a + b)$
4) $(4y^2 + 3)y + 6(4y^2 + 3)$
5) $a(b - 3c) + x(b - 3c)$
6) $ax + by + bx + ay$
7) $5a - 10x + ab - 2bx$
8) $na + 3b + nb + 3a$
9) $xy - st - xt + sy$
10) $n^2m + n^2p - 8m - 8p$
11) $ab^2 - cb^2 - 6a + 6c$
12) $2x^3 - x + 14x^2 - 7$
13) $a^2 - 2b - 5a^3 + 10ab$
14) $x^3 - x^3z + y^2z - y^2$