

Kalkulus dengan EMT

Nama : Dina Haezah
NIM : 24030130098

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi:

$$f(x) = 2x^2 + e^{\sin(x)}.$$

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

```
>f(a) // tidak dapat dihitung nilainya
```

```
Variable or function a not found.
Error in:
f(a) // tidak dapat dihitung nilainya ...
^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

Berikutnya kita definisikan fungsi:

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(3)
```

```
0
```

```
>g(0)
```

```
0
```

```
>g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
g:
  useglobal; return sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
Error in:
g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik ...
^
```

Silakan Anda plot kurva fungsi di atas!

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
0.950898070639
```

```
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

```
2.20920171961
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

dan

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(0), f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1, 4.31978, 10.4826, 19.1516, 32.4692, 50.3833, 72.7562,
99.929, 130.69, 163.51, 200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1, 4.31978, 10.4826, 19.1516, 32.4692, 50.3833, 72.7562,
99.929, 130.69, 163.51, 200.58]
```

```
>gmap(200:210)
```

```
[0.987534, 0.987596, 0.987657, 0.987718, 0.987778, 0.987837,
0.987896, 0.987954, 0.988012, 0.988069, 0.988126]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
  if x>0 then return x^3
  else return x^2
endif;
endfunction
```

```
>f(1)
```

```
1
```

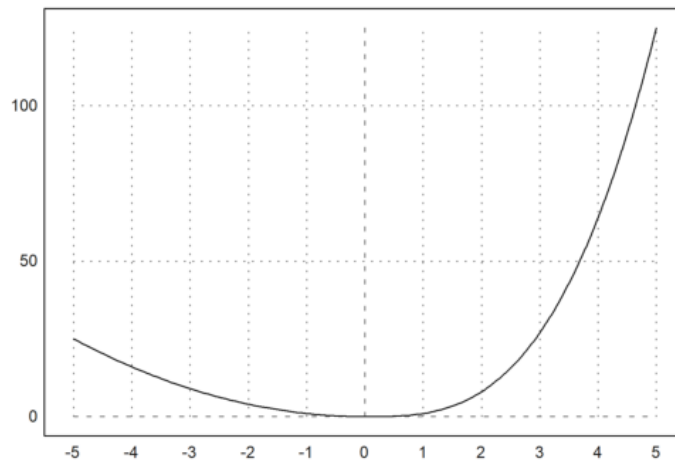
```
>f(-2)
```

```
4
```

```
>f(-5:5)
```

```
[25, 16, 9, 4, 1, 0, 1, 8, 27, 64, 125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):
```



```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

$$2 e^x$$

```
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik
```

$$2 e^a$$

```
>f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal
```

```
30.308524483
```

```
>$f(E), $float(%)
```

$$2 e^e$$

$$30.30852448295852$$

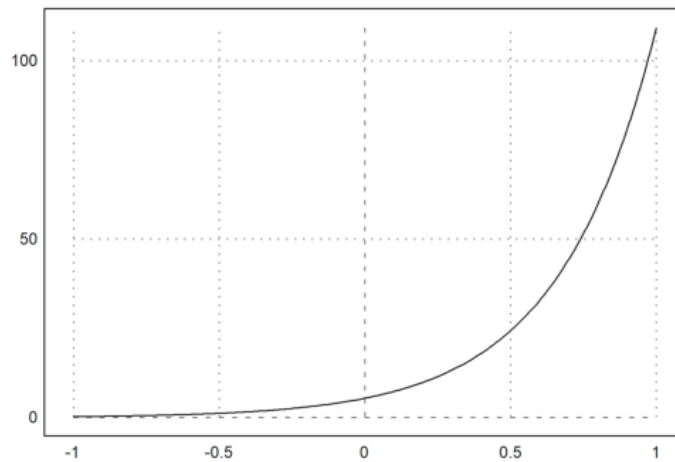
```
>function g(x) &= 3*x+1
```

$$3 x + 1$$

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

$$2 e^{3 x + 1}$$

```
>plot2d("h(x)",-1,1):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan fungsi-fungsi tersebut dan komposisinya di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik fungsi-fungsi tersebut dan komposisi-komposisi 2 fungsi.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

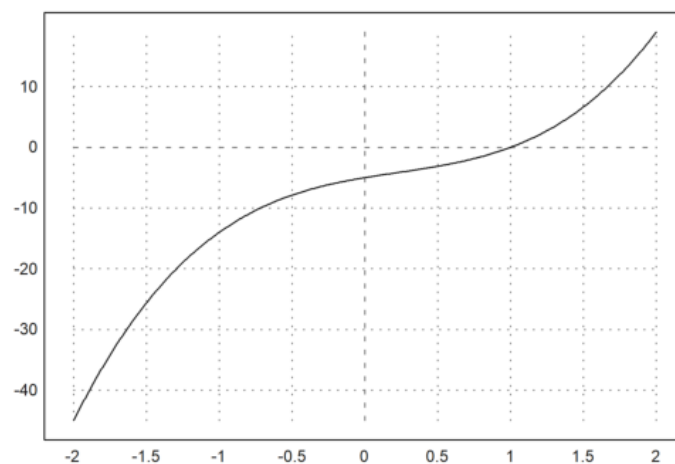
```
>function f(x) := 3*x^3-2*x^2+4*x-5
>f(2)
```

19

```
>f(-2:2)
```

[-45, -14, -5, 0, 19]

```
>plot2d("f(x)",-2,2):
```



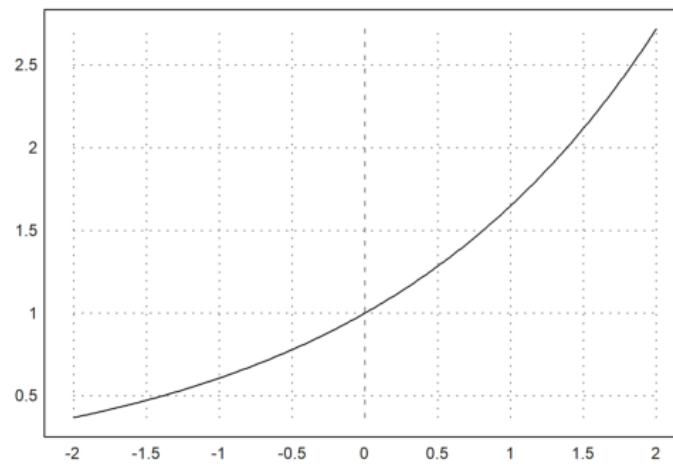
```
>function g(x) := exp(0.5*x)
>g(3)
```

4.48168907034

```
>g(-3:3)
```

[0.22313, 0.367879, 0.606531, 1, 1.64872, 2.71828, 4.48169]

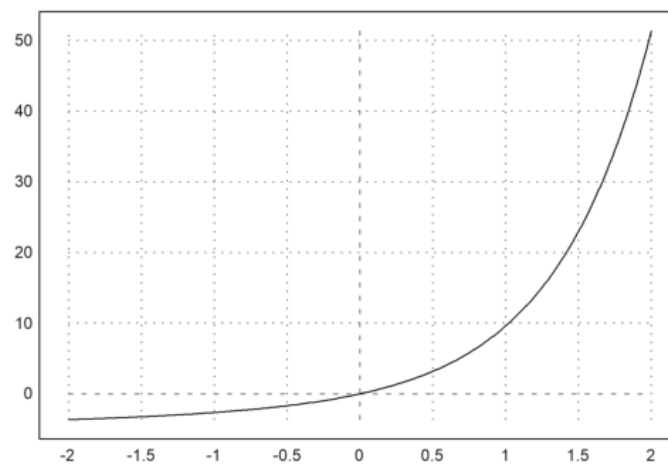
```
>plot2d("g(x)",-2,2):
```



```
>f(g(4))
```

```
1125.64630481
```

```
>function h(x) := f(g(x))
>plot2d("h(x)",-2,2):
```



```
>g(f(-1))
```

```
0.000911881965555
```

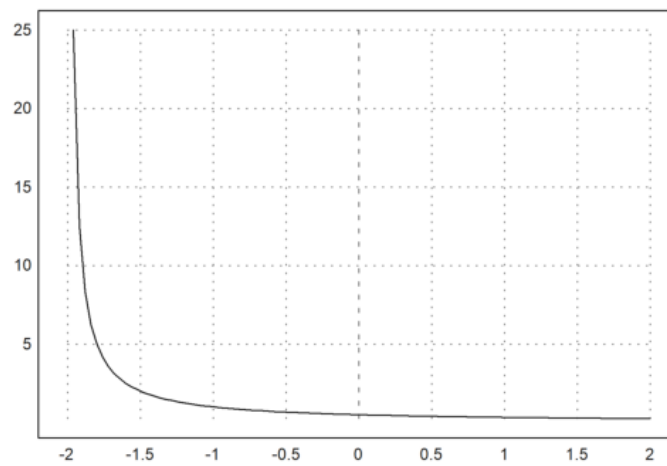
```
>function f(x) := 1/(x+2)
>f(5)
```

```
0.142857142857
```

```
>f(-1:1)
```

```
[1, 0.5, 0.333333]
```

```
>plot2d("f(x)",-2,2):
```



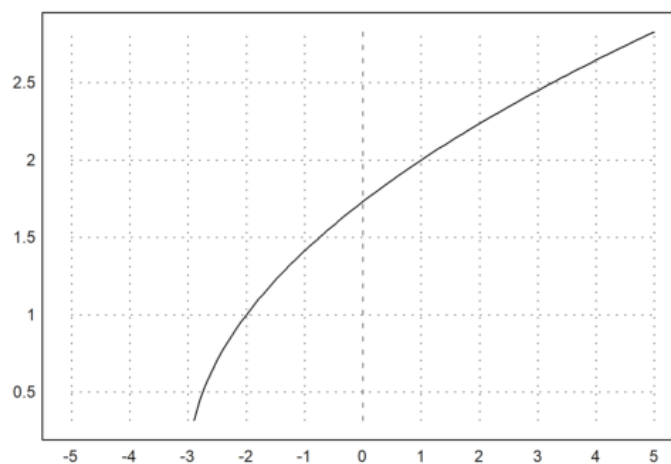
```
>function g(x) := sqrt(x+3)
>g(6)
```

```
3
```

```
>g(-1:1)
```

```
[1.41421, 1.73205, 2]
```

```
>plot2d("g(x)",-5,5):
```



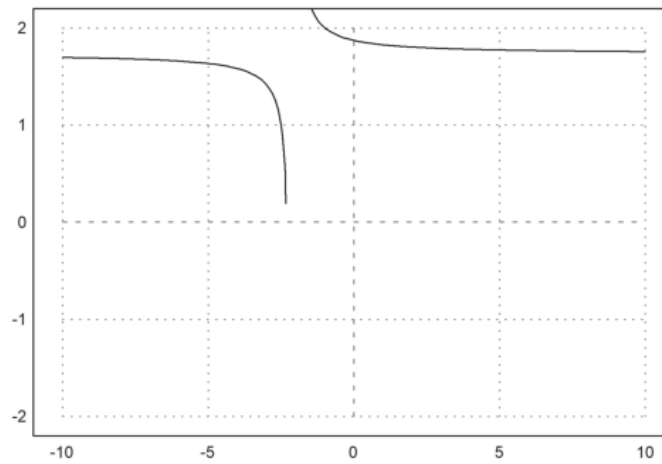
```
>f(g(10))
```

```
0.178394586163
```

```
>g(f(15))
```

```
1.74894926439
```

```
>function h(x) := g(f(x))
>plot2d("h(x)",-10,10,-2,2):
```



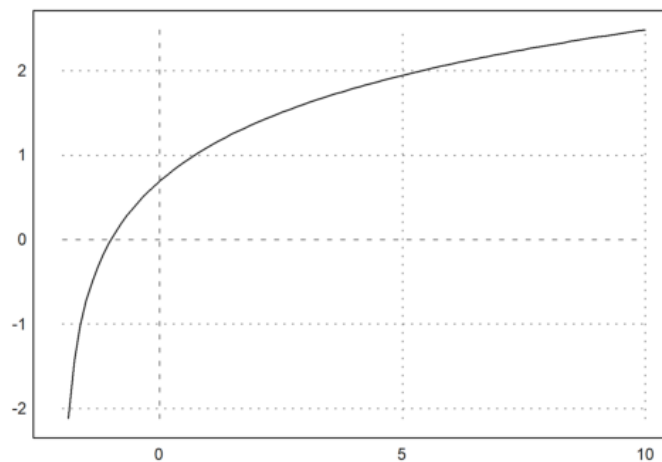
```
>function f(x) := ln(x+2)
>f(-1)
```

```
0
```

```
>f(-1:1)
```

```
[0, 0.693147, 1.09861]
```

```
>plot2d("f(x)",-2,10):
```



Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und" (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga).

Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2-3*x)/(x+1),x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1} = 1$$

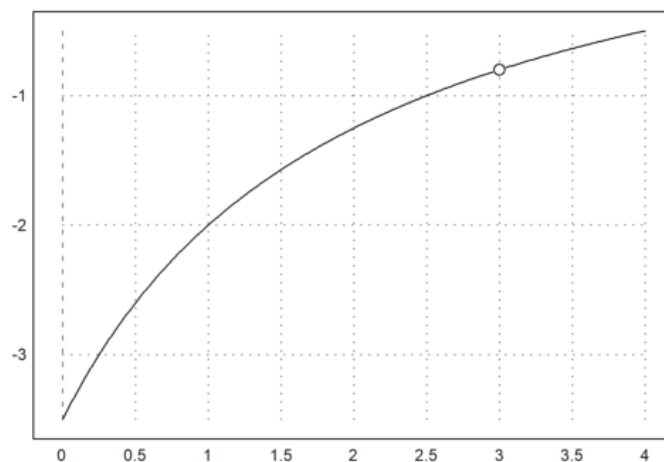
```
>$limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)
```

$$-\frac{4}{5}$$

maxima: 'limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)=limit((x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18),x,3)

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=3. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>aspect(1.5); plot2d("(x^3-13*x^2+51*x-63)/(x^3-4*x^2-3*x+18)",0,4); plot2d(3,-4/5,>points,style="ow",>add):
```



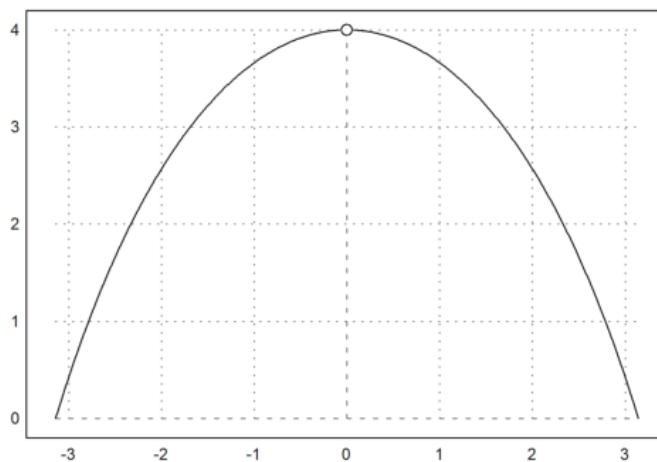
```
>$limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)
```

$$4$$

maxima: 'limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)=limit(2*x*sin(x)/(1-cos(x)),x,0)

Fungsi tersebut diskontinu di titik x=0. Berikut adalah grafik fungsinya.

```
>plot2d("2*x*sin(x)/(1-cos(x))",-pi,pi); plot2d(0,4,>points,style="ow",>add):
```



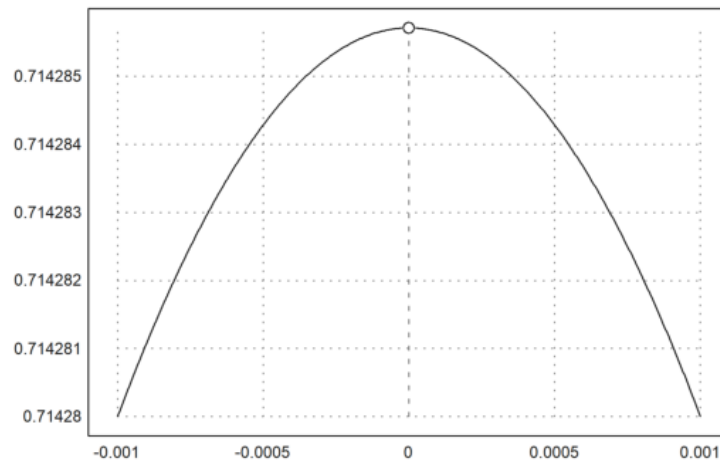
```
>$limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0)
```

$$\frac{5}{7}$$

maxima: showev('limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0))

Fungsi tersebut juga diskontinu (karena tidak terdefinisi) di x=0. Berikut adalah grafiknya.

```
>plot2d("cot(7*x)/cot(5*x)",-0.001,0.001); plot2d(0,5/7,>points,style="ow",>add):
```



```
>$showev('limit((x/8)^(1/3)-1)/(x-8),x,8)')
```

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\frac{x^{\frac{1}{3}}}{2} - 1}{x - 8} = \frac{1}{24}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0)')
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x - 1} = -1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5)')
```

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} = 7$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sqrt(x^2+x)-x,x,inf)')
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{2}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(abs(x-1)/(x-1),x,1,minus)')
```

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1} = -1$$

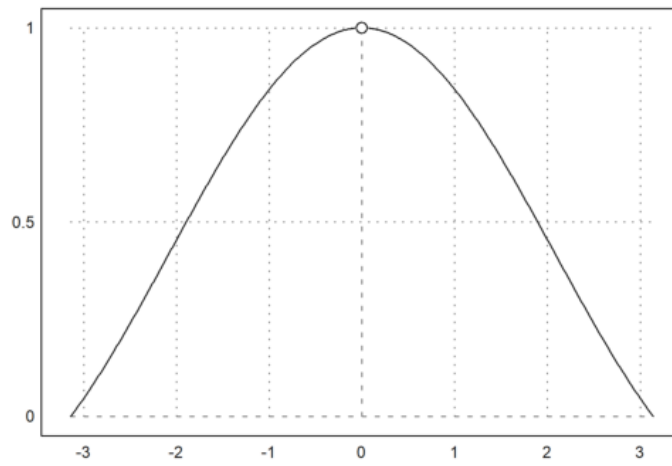
Hitung limit di atas untuk x menuju 1 dari kanan.

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0)')
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```



```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0)')
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{x} = 0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit(log(x), x, minf)')
```

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log x = \text{infinity}$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf)')
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-2)^x = \text{infinity}$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus)')
```

$$\lim_{t \uparrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

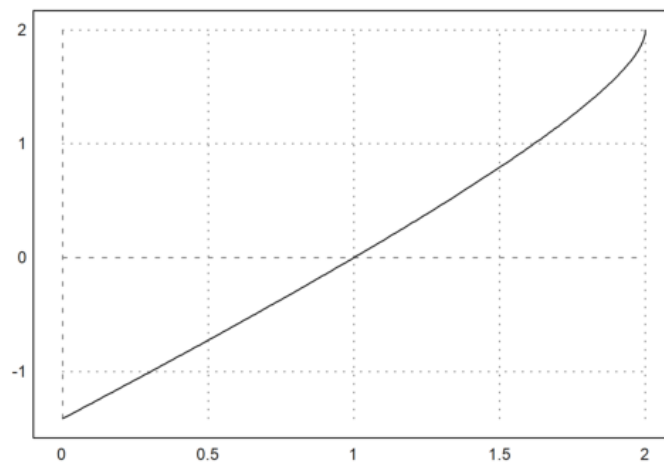
```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,plus)')
```

$$\lim_{t \downarrow 2} t - \sqrt{2-t} = 2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t \downarrow 5} t - \sqrt{2-t} = 5 - \sqrt{3}i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",0,2):
```



```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{6}{7}$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

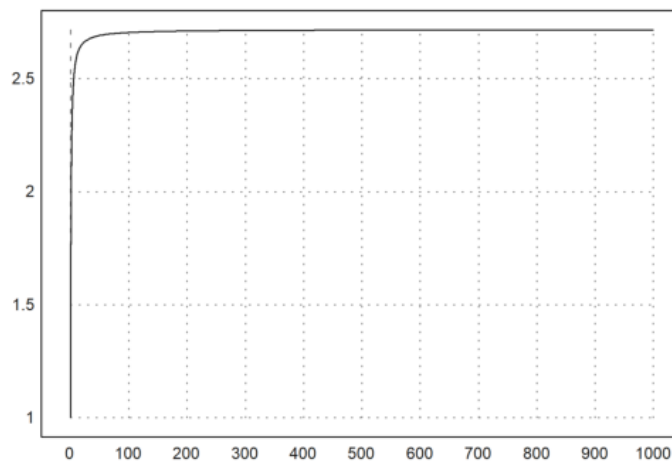
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + x^2}{x^2 - |x|} = -1$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right)^x = e$$

```
>plot2d("(1+1/x)^x",0,1000):
```



```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{x} + 1 \right)^x = e^k$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{\frac{1}{x}} = e$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x + k} \right)^x = e^{-k}$$

```
>$showev('limit((E^x-E^2)/(x-2),x,2))
```

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} = e^2$$

Tunjukkan limit tersebut dengan grafik, seperti contoh-contoh sebelumnya.

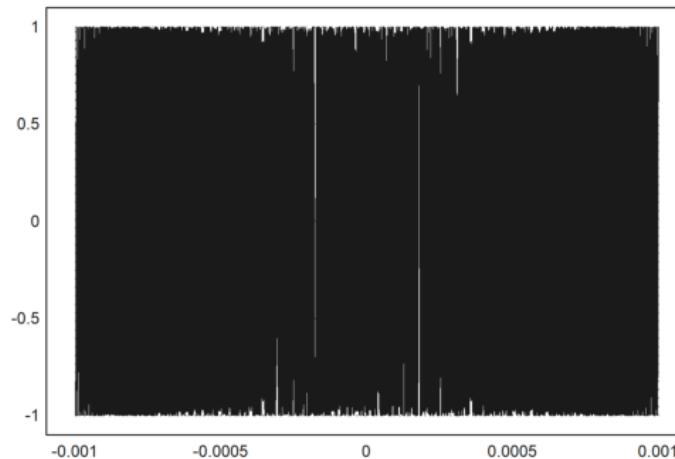
```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0)')
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ind$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf)')
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-0.001,0.001):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

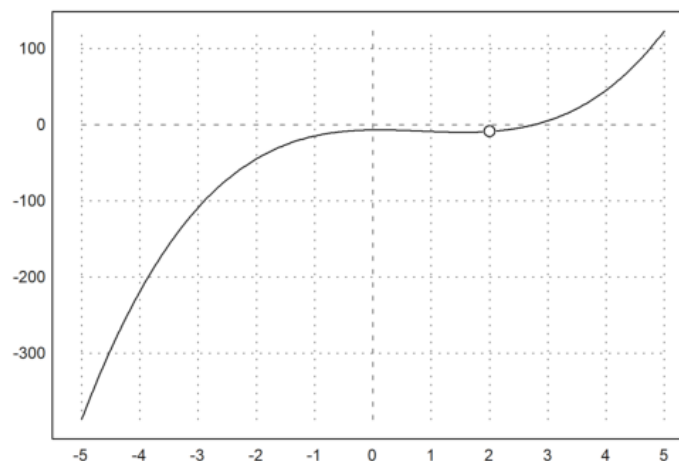
```
>$showev('limit(2*x^3-5*x^2+x-7,x,inf)')
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 - 5x^2 + x - 7 = \infty$$

```
>$showev('limit(2*x^3-5*x^2+x-7,x,2)')
```

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^3 - 5x^2 + x - 7 = -9$$

```
>plot2d("2*x^3-5*x^2+x-7",-5,5); plot2d(2,-9,>points,style="ow",>add):
```



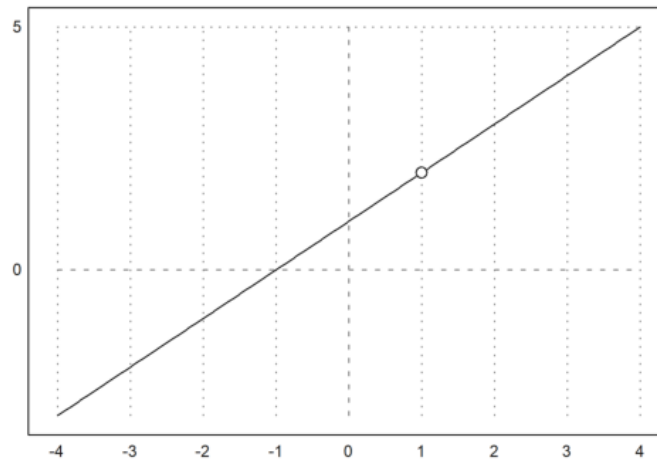
```
>$showev('limit((x^2-1)/(x-1),x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \infty$$

```
>$showev('limit((x^2-1)/(x-1),x,1))
```

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

```
>plot2d("(x^2-1)/(x-1)",-4,4); plot2d(1,2,>points,style="ow",>add):
```



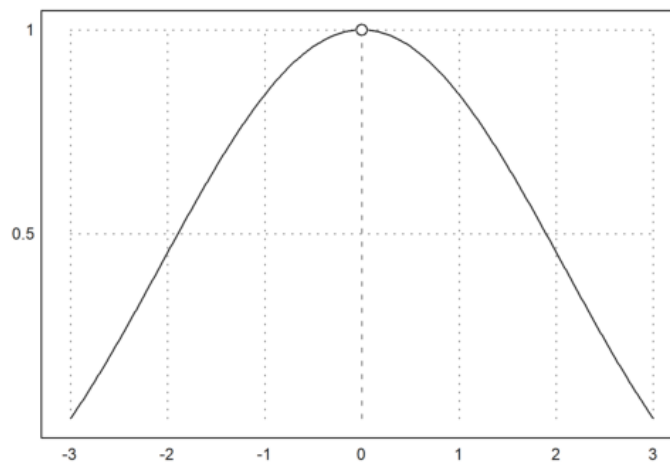
```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-3,3); plot2d(0,1,>points,style="ow",>add):
```



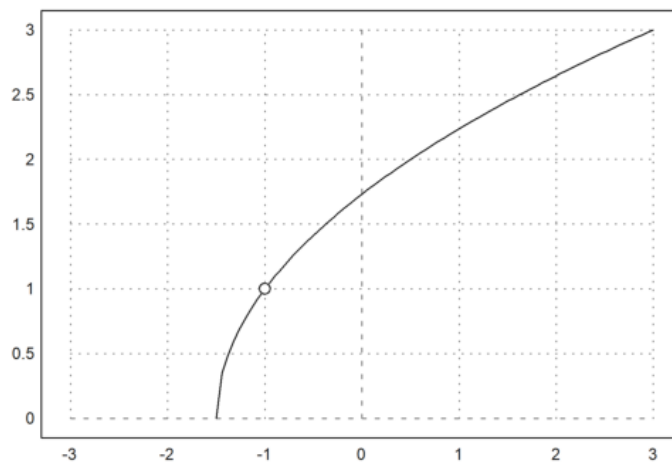
```
>$showev('limit(sqrt(2*x+3),x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x + 3} = \infty$$

```
>$showev('limit(sqrt(2*x+3),x,-1))
```

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{2x+3} = 1$$

```
>plot2d("sqrt(2*x+3)",-3,3); plot2d(-1,1,>points,style="ow",>add):
```



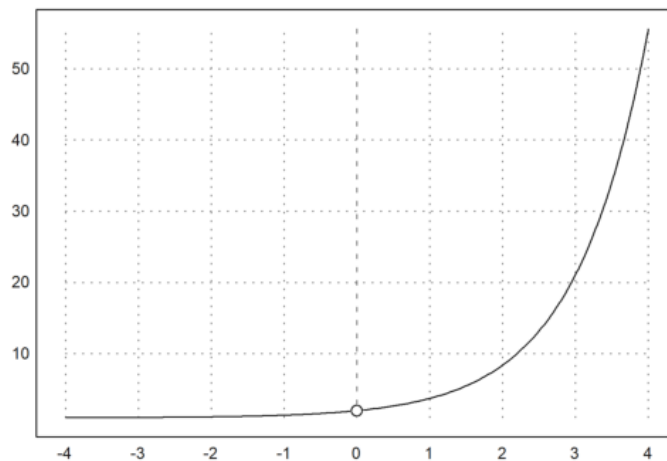
```
>$showev('limit(E^x+1,x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x + 1 = \infty$$

```
>$showev('limit(E^x+1,x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x + 1 = 2$$

```
>plot2d("E^x+1",-4,4); plot2d(0,2,>points,style="ow",>add):
```



Turunan Fungsi

Definisi turunan:

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^2-x^2)/h,h,0)) // turunan x^2
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

```
>p &= expand((x+h)^2-x^2)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$2hx + h^2$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$2x + h$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$2x$$

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan $(x+h)^n$ dengan menggunakan teorema binomial.

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan $\sin(x+h)$ dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = -\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

```
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Answering "Is x an integer?" with "integer"
Maxima is asking
Acceptable answers are: yes, y, Y, no, n, N, unknown, uk
Is x an integer?

Use assume!
Error in:
  $showev('limit((E^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x ...
^
```

Maxima bermasalah dengan limit:

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

```
>$showev('factor(E^(x+h)-E^x))
```

$$\text{factor}(e^{x+h} - e^x) = (e^h - 1) e^x$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) e^x = e^x$$

```
>function f(x) &= x^x
```

$$\frac{x}{x}$$

```
>$showev('limit(f(x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

Silakan Anda gambar kurva

```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h} = \text{infinity}$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{x+h} - x^x}{h} = x^x (\log x + 1)$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

$$[x > 0]$$

```
>&forget(x<0)
```

$$[x < 0]$$

```
>&facts()
```

$$[]$$

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x+h) - \arcsin x}{h} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

$$\sinh(x)$$

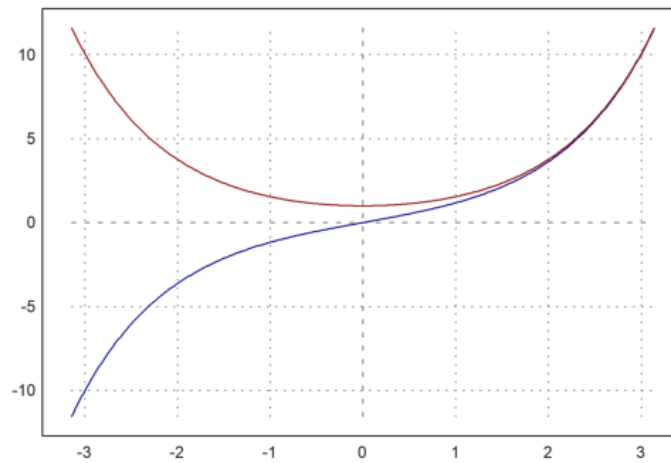
```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x} (e^{2x} + 1)}{2}$$

Hasilnya adalah $\cosh(x)$, karena

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[blue, red]):
```



```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

$$\sin^2(3x^5 + 7)$$

```
>diff(f,3), diffc(f,3)
```

```
1198.32948904
1198.72863721
```

Apakah perbedaan `diff` dan `diffc`?

```
>$showev('diff(f(x),x)')
```

$$\frac{d}{dx} \sin^2(3x^5 + 7) = 30x^4 \cos(3x^5 + 7) \sin(3x^5 + 7)$$

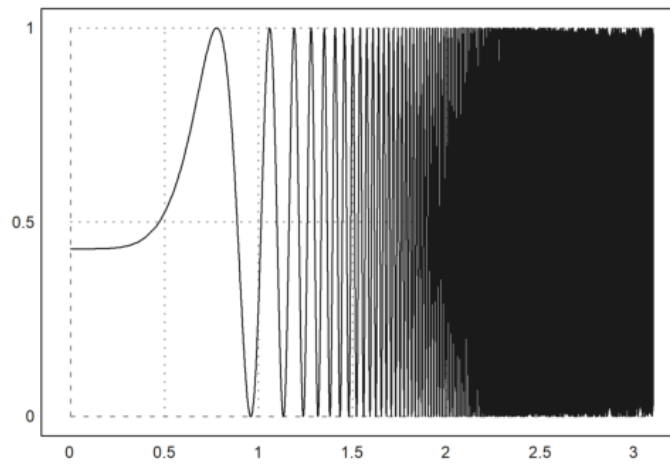
```
>$% with x=3
```

$$\%at \left(\frac{d}{dx} \sin^2(3x^5 + 7), x = 3 \right) = 2430 \cos 736 \sin 736$$

```
>$float(%)
```

$$\%at \left(\frac{d^{1.0}}{dx^{1.0}} \sin^2(3.0x^5 + 7.0), x = 3.0 \right) = 1198.728637211748$$

```
>plot2d(f,0,3.1):
```



```
>function f(x) &=5*cos(2*x)-2*x*sin(2*x) // mendefinisikan fungsi f
```

$$5 \cos(2 x) - 2 x \sin(2 x)$$

```
>function df(x) &=diff(f(x),x) // fd(x) = f'(x)
```

$$- 12 \sin(2 x) - 4 x \cos(2 x)$$

```
>$'f(1)=f(1), $float(f(1)), $'f(2)=f(2), $float(f(2)) // nilai f(1) dan f(2)
```

$$f(1) = 5 \cos 2 - 2 \sin 2$$

$$-3.899329036387075$$

$$f(2) = 5 \cos 4 - 4 \sin 4$$

$$-0.2410081230863468$$

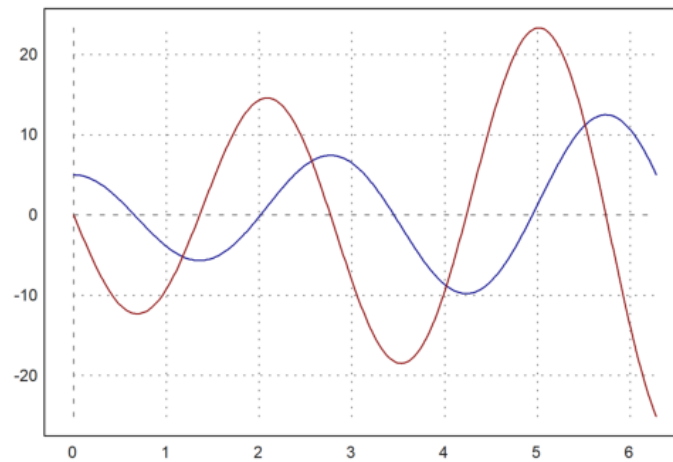
```
>xp=solve("df(x)",1,2,0) // solusi f'(x)=0 pada interval [1, 2]
```

$$1.35822987384$$

```
>df(xp), f(xp) // cek bahwa f'(xp)=0 dan nilai ekstrim di titik tersebut
```

$$\begin{matrix} 0 \\ -5.67530133759 \end{matrix}$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"],0,2*pi,color=[blue,red]): //grafik fungsi dan turunannya
```



Perhatikan titik-titik "puncak" grafik $y=f(x)$ dan nilai turunan pada saat grafik fungsinya mencapai titik "puncak" tersebut.

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), menggunakan perintah diff, dan secara manual (langkah demi langkah yang dihitung dengan Maxima) seperti contoh-contoh di atas. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

```
>$showev('limit(( (x+h)^3-x^3)/h,h,0))
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

```
>function f(x) &= x^3
```

$$x^3$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x)
```

$$3x^2$$

```
>$showev('diff(f(x),x))
```

$$\frac{d}{dx} x^3 = 3x^2$$

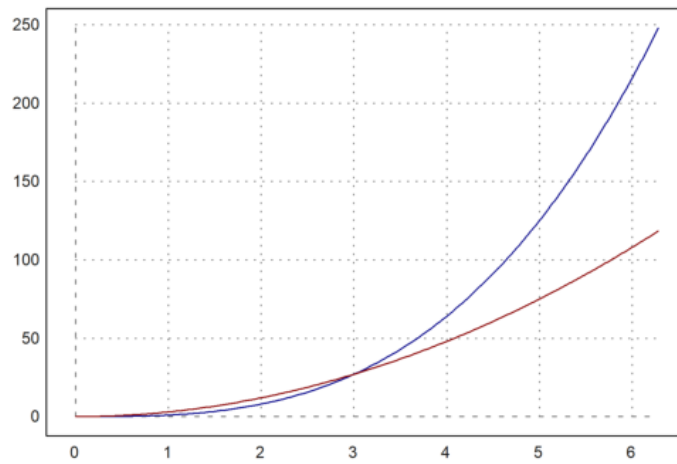
Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], 0, 2*pi, color=[blue, red]):
```



```
>function f(x) &=(3*x+2)/(x^2-1)
```

$$\frac{3x + 2}{x^2 - 1}$$

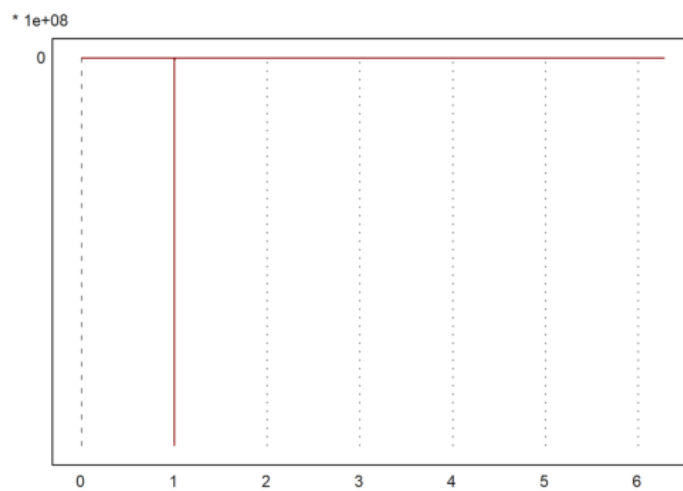
```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x)
```

$$\frac{-3x^2 - 4x - 3}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

```
>$showev('diff(f(x),x)')
```

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{3x+2}{x^2-1} \right) = \frac{3}{x^2-1} - \frac{2x(3x+2)}{(x^2-1)^2}$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], 0, 2*pi, color=[blue, red]):
```



```
>function f(x) &=sin(x)
```

$$\sin(x)$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x)
```

$$\cos x$$

```
>$showev('diff(f(x),x)')
```

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

Definisikan turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Substitusikan fungsi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x (\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

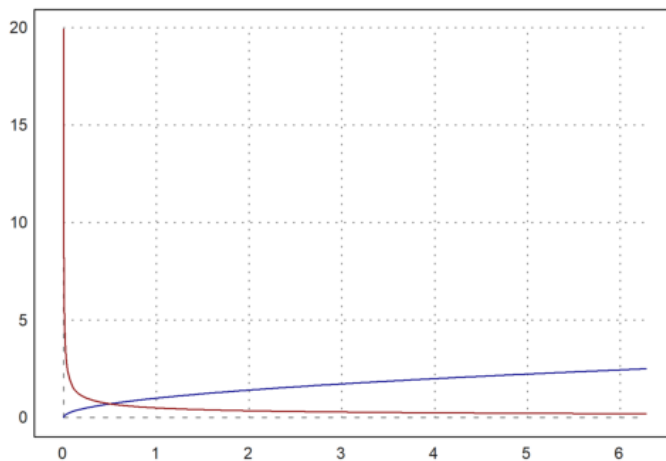
$$f'(x) = \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{dan} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

$$f'(x) = \sin x(0) + \cos x(1)$$

$$f'(x) = \cos x$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], 0, 2*pi, color=[blue, red]):
```



```
>function f(x) &=sqrt(x);$f(x)
```

$$\sqrt{x}$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x)
```

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

```
>$showev('diff(f(x),x)')
```

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Definisikan turunan

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

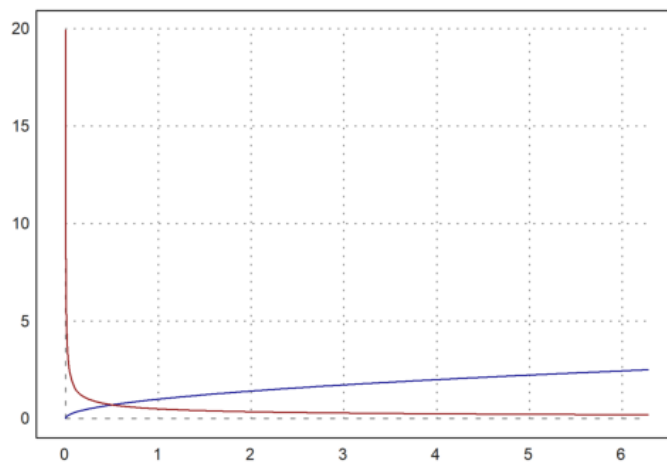
$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= (\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) \\
 &= (x+h) - xh(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) \\
 &= \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0
 \end{aligned}$$

Untuk $x=0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Jadi turunan di $x=0$ tidak ada

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], 0, 2*pi, color=[blue, red]):
```



```
>function f(x) &= exp(2*x)
```

$$E^{2x}$$

```
>$showev('limit((E^(2*h) - 1)/h, h, 0))
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{2h} - 1}{h} = 2$$

```
>$showev('factor(E^(2*(x+h)) - E^(2*x))')
```

$$\text{factor}\left(e^{2(x+h)} - e^{2x}\right) = \left(e^h - 1\right)\left(e^h + 1\right)e^{2x}$$

```
>$showev('limit(factor((E^(2*(x+h)) - E^(2*x))/h), h, 0)')
```

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h - 1)(e^h + 1)}{h} \right) e^{2x} = 2e^{2x}$$

Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

Fungsi untuk menentukan integral adalah `integrate`. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi `integrate` menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

Answering "Is n equal to -1?" with "no"

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \log(x+1)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x$$

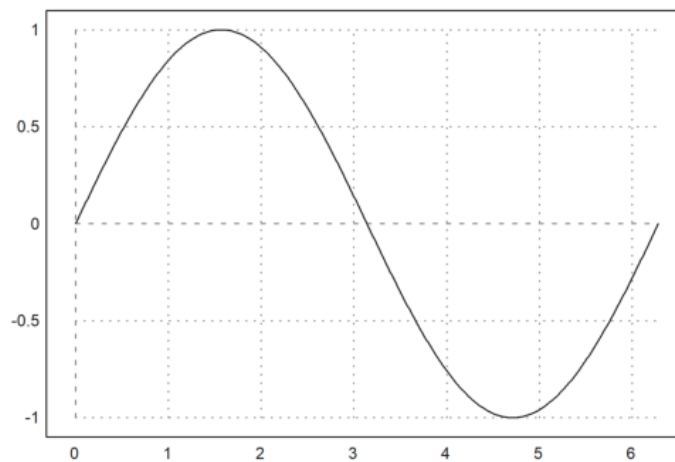
```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^\pi \sin x dx = 2$$

```
>plot2d("sin(x)",0,2*pi):
```



```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b)
```

Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"

$$\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x)
```

$$\int x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{(2x+1)^{\frac{7}{2}}}{28} - \frac{(2x+1)^{\frac{5}{2}}}{10} + \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2)
```

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{2 \cdot 5^{\frac{5}{2}}}{21} - \frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} dx = \frac{2 \cdot 5^{\frac{7}{2}} - 2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2)
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x}+a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = (-e^{\pi} - 1) \sin a + (e^{\pi} + 1) \cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x}+a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = (-e^{\pi} - 1) (\sin a - \cos a)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2)
```

$$e^{-x^2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x)
```

$$\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)}{2}$$

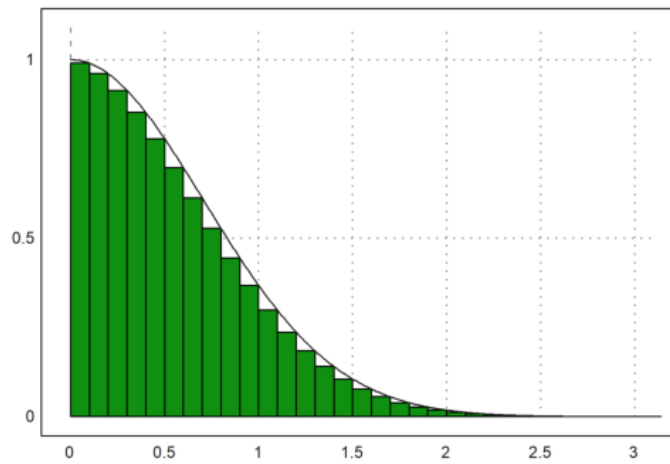
Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).

Misalkan kita akan menghitung:

```
maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)
```

```
>x:=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Integral tentu

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)

dapat dihamperi dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva $y=f(x)$ tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:

maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi) = 0.1*sum(fx[i],i,1,length(fx))

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval ($=0.1$) dan jumlah nilai-nilai $f(x)$ untuk $x = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 3.2$.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

0.836219610253

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)

Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tunjukkan kebenaran hasil di atas!

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

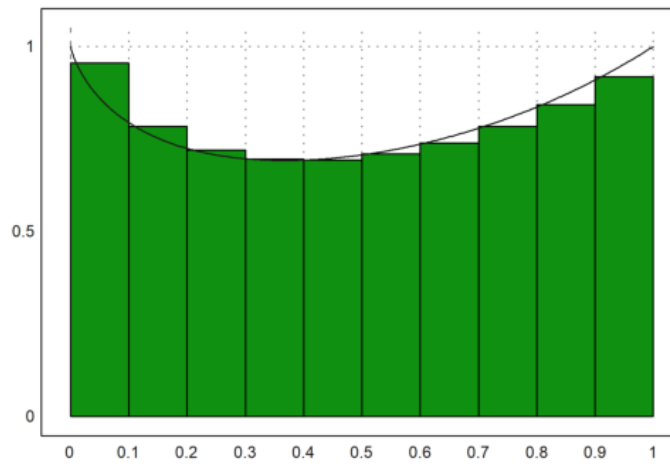
```
>function f(x) &= x^x
```

x^x

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 x^x dx$$

```
>x:=0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```



Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah `integrate`. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

maxima: `'integrate(f(x),x,0,1) = 0.01*sum(fx[i],i,1,length(fx))`

Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

$$\sin^2(3x^5 + 7)$$

```
>integrate(f,0,1)
```

```
0.542581176074
```

```
>&showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin^2(3x^5 + 7) dx = \frac{\frac{1}{5} \gamma\left(-\frac{1}{5}\right) \sin(14) \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)}{10^{\frac{1}{5}} 6} \\ & - \left(\left(6^{\frac{4}{5}} \gamma_{\text{incomplete}}\left(-\frac{1}{5}, 6I\right) + 6^{\frac{4}{5}} \gamma_{\text{incomplete}}\left(-\frac{1}{5}, -6I\right) \right) \right. \\ & \left. \sin(14) + \left(6^{\frac{4}{5}} I \gamma_{\text{incomplete}}\left(-\frac{1}{5}, 6I\right) - 6^{\frac{4}{5}} I \gamma_{\text{incomplete}}\left(-\frac{1}{5}, -6I\right) \right) \cos(14) \right) \sin\left(\frac{\pi}{10}\right) - 60/120 \end{aligned}$$

```
>&float(%)
```

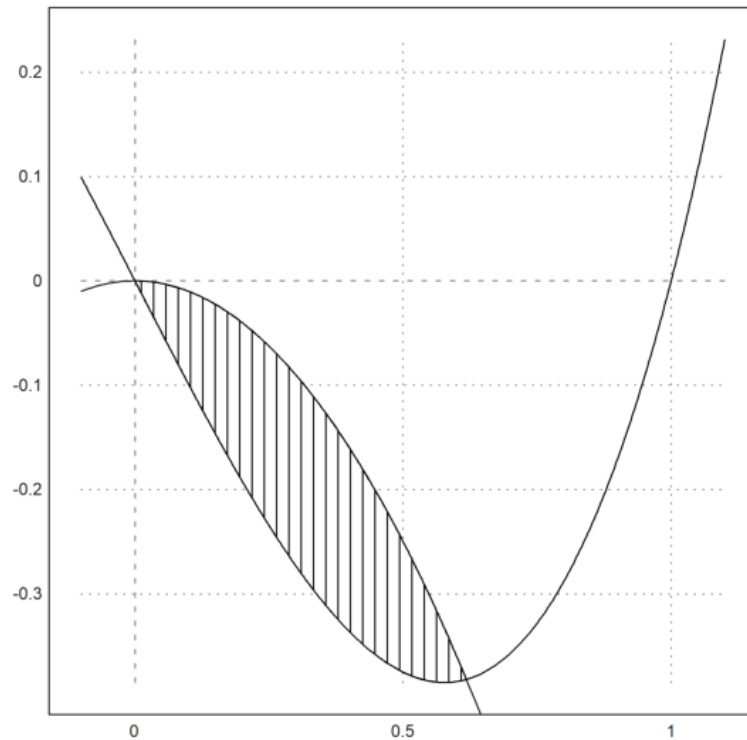
$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin^2(3.0x^5 + 7.0) dx = \\ & 0.09820784258795788 - 0.008333333333333333 \\ & (0.3090169943749474 (0.1367372182078336 \\ & (4.192962712629476 I \gamma_{\text{incomplete}}(0.2, 6.0 I) \\ & - 4.192962712629476 I \gamma_{\text{incomplete}}(0.2, -6.0 I)) \\ & + 0.9906073556948704 (4.192962712629476 \gamma_{\text{incomplete}}(0.2, 6.0 I) \end{aligned}$$

```
+ 4.192962712629476 gamma_incomplete(0.2, - 6.0 I))) - 60.0)
```

```
>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1)) // Integral tentu (eksak)
```

Aplikasi Integral Tentu

```
>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add); ...
b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x); ...
plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add): // Plot daerah antara 2 kurva
```



```
>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1) // absis titik-titik potong kedua kurva
```

```
0
0.61803398875
```

```
>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b) // luas daerah yang diarsir
```

```
0.0758191713542
```

Hasil tersebut akan kita bandingkan dengan perhitungan secara analitik.

```
>a &= solve((-x^2)-(x^3-x),x); $a // menentukan absis titik potong kedua kurva secara eksak
>$showev('integrate(-x^2-x^3+x,x,0,(sqrt(5)-1)/2)) // Nilai integral secara eksak
>$float(%)
```

Panjang Kurva

Hitunglah panjang kurva berikut ini dan luas daerah di dalam kurva tersebut.

dengan

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5): // Kita gambar kurvanya terlebih dahulu
>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $'r(t)=r(t)
>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'ds(t)=ds(t)
>$integrate(ds(x),x,0,2*pi) //panjang (keliling) kurva
```

Maxima gagal melakukan perhitungan eksak integral tersebut.

Berikut kita hitung integralnya secara umerik dengan perintah EMT.

```
>integrate("ds(x)",0,2*pi)
```

```
9.0749467823
```

Spiral Logaritmik

```
>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi):
>%kill(a) // hapus ekspresi a
```

```
done
```

```
>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
>function df(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t)
>S &=integrate(df(t),t,0,2*pi); $S // panjang kurva (spiral)
>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1
```

```
8.78817491636
```

Soal:

Tunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah $K=2\pi r$.

Berikut adalah contoh menghitung panjang parabola.

```
>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):
>$showev('integrate(sqrt(1+diff(x^2,x)^2),x,-1,1))
>$float(%)
>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y); ...
plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):
```

Panjang tersebut dapat dihipir dengan menggunakan jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola tersebut.

```
>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))
```

```
2.95191957027
```

Hasilnya mendekati panjang yang dihitung secara eksak. Untuk mendapatkan hampiran yang cukup akurat, jarak antar titik dapat diperkecil, misalnya 0.1, 0.05, 0.01, dan seterusnya. Cobalah Anda ulangi perhitungannya dengan nilai-nilai tersebut.

Koordinat Kartesius

Berikut diberikan contoh perhitungan panjang kurva menggunakan koordinat Kartesius. Kita akan hitung panjang kurva dengan persamaan implisit:

```
>z &= x^3+y^3-3*x*y; $z
>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):
```

Kita tertarik pada kurva di kuadran pertama.

```
>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):
```

Kita selesaikan persamaannya untuk x .

```
>$z with y=1*x, sol &= solve(%,x); $sol
```

Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

```
>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)
```

Fungsi tersebut juga dapat digunaka untuk menggambar kurvanya. Ingat, bahwa fungsi tersebut adalah nilai x dan nilai $y=l^3x$, yakni $x=f(l)$ dan $y=l^3f(l)$.

```
>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):
```

Elemen panjang kurva adalah:

```
>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=ds(l)
>$integrate(ds(l),l,0,1)
```

Integral tersebut tidak dapat dihitung secara eksak menggunakan Maxima. Kita hitung integral tersebut secara numerik dengan Euler. Karena kurva simetris, kita hitung untuk nilai variabel integrasi dari 0 sampai 1, kemudian hasilnya dikalikan 2.

```
>2*integrate("ds(x)",0,1)
```

```
4.91748872168
```

```
>2*romberg(&ds(x),0,1)// perintah Euler lain untuk menghitung nilai hampiran integral yang sama
```

```
4.91748872168
```

Perhitungan di atas dapat dilakukan untuk sebarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT, misalnya kita beri nama panjangkurva. Fungsi ini selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

```
>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...
  ds:=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");
  return romberg(ds,a,b);
endfunction
```

```
>panjangkurva("x","x^2",-1,1) // cek untuk menghitung panjang kurva parabola sebelumnya
```

```
2.95788571509
```

Bandingkan dengan nilai eksak di atas.

```
>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1) // cek contoh terakhir, bandingkan hasilnya!
```

```
4.91748872168
```

Kita hitung panjang spiral Archimides berikut ini dengan fungsi tersebut.

```
>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):
>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)
```

```
21.2562941482
```

Berikut kita definisikan fungsi yang sama namun dengan Maxima, untuk perhitungan eksak.

```
>&kill(ds,x,fx,fy)
```

```
done
```

```
>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)^2+diff(fy,x)^2)
```

```
sqrt(diff(fy,x)^2 + diff(fx,x)^2)
```

```
>sol &= ds(x*cos(x),x*sin(x)); $sol // Kita gunakan untuk menghitung panjang kurva terakhir di atas
>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()
```

```
21.2562941482
```

Hasilnya sama dengan perhitungan menggunakan fungsi EMT.

Berikut adalah contoh lain penggunaan fungsi Maxima tersebut.

```
>plot2d("3*x^2-1","3*x^3-1",xmin=-1/sqrt(3),xmax=1/sqrt(3),square=1):
>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol
>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di atas
```

Sikloid

Berikut kita akan menghitung panjang kurva lintasan (sikloid) suatu titik pada lingkaran yang berputar ke kanan pada permukaan datar. Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah r . Posisi titik pusat lingkaran pada saat t adalah:

Misalkan posisi titik pada lingkaran tersebut mula-mula (0,0) dan posisinya pada saat t adalah:

Berikut kita plot lintasan tersebut dan beberapa posisi lingkaran ketika $t=0$, $t=\pi/2$, $t=\pi$.

```
>x &= r*(t-sin(t))
```

```
r (t - sin(t))
```

```
>y &= r*(1-cos(t))
```

```
r (1 - cos(t))
```

Berikut kita gambar sikloid untuk $r=1$.

```
>ex &= x-sin(x); ey &= 1-cos(x); aspect(1);
>plot2d(ex,ey,xmin=0,xmax=4pi,square=1); ...
  plot2d("2+cos(x)", "1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
  plot2d([2,ex(2)], [1,ey(2)],color=red,>add); ...
  plot2d(ex(2),ey(2),>points,>add,color=red); ...
  plot2d("2pi+cos(x)", "1+sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue); ...
  plot2d([2pi,ex(2pi)], [1,ey(2pi)],color=red,>add); ...
  plot2d(ex(2pi),ey(2pi),>points,>add,color=red):
```

Berikut dihitung panjang lintasan untuk 1 putaran penuh. (Jangan salah menduga bahwa panjang lintasan 1 putaran penuh sama dengan keliling lingkaran!)

```
>ds &= radcan(sqrt(diff(ex,x)^2+diff(ey,x)^2)); $ds=trigsimp(ds) // elemen panjang kurva sikloid
>ds &= trigsimp(ds); $ds
>$showev('integrate(ds,x,0,2*pi)') // hitung panjang sikloid satu putaran penuh
>integrate(mxm("ds"),0,2*pi) // hitung secara numerik
```

8

```
>romberg(mxm("ds"),0,2*pi) // cara lain hitung secara numerik
```

8

Perhatikan, seperti terlihat pada gambar, panjang sikloid lebih besar daripada keliling lingkarannya, yakni:

Kurvatur (Kelengkungan) Kurva

image: Osculating.png

Aslinya, kelengkungan kurva diferensiabel (yakni, kurva mulus yang tidak lancip) di titik P didefinisikan melalui lingkaran oskulasi (yaitu, lingkaran yang melalui titik P dan terbaik memperkirakan, paling banyak menyinggung kurva di sekitar P). Pusat dan radius kelengkungan kurva di P adalah pusat dan radius lingkaran oskulasi. Kelengkungan adalah kebalikan dari radius kelengkungan:

dengan R adalah radius kelengkungan. (Setiap lingkaran memiliki kelengkungan ini pada setiap titiknya, dapat diartikan, setiap lingkaran berputar 2π sejauh $2\pi R$.) Definisi ini sulit dimanipulasi dan dinyatakan ke dalam rumus untuk kurva umum. Oleh karena itu digunakan definisi lain yang ekuivalen.

Definisi Kurvatur dengan Fungsi Parametrik Panjang Kurva

Setiap kurva diferensiabel dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik terhadap panjang kurva s :

dengan x dan y adalah fungsi riil yang diferensiabel, yang memenuhi:

Ini berarti bahwa vektor singgung

memiliki norm 1 dan merupakan vektor singgung satuan.

Apabila kurvanya memiliki turunan kedua, artinya turunan kedua x dan y ada, maka $T'(s)$ ada. Vektor ini merupakan normal kurva yang arahnya menuju pusat kurvatur, norm-nya merupakan nilai kurvatur (kelengkungan):

Nilai

disebut jari-jari (radius) kelengkungan kurva.

Bilangan riil

disebut nilai kelengkungan bertanda.

Contoh:

Akan ditentukan kurvatur lingkaran

```
>fx &= r*cos(t); fy &=r*sin(t);
>&assume(t>0,r>0); s &=integrate(sqrt(diff(fx,t)^2+diff(fy,t)^2),t,0,t); s // elemen panjang kurva, panjang
```

$$r \ t$$

```
>&kill(s); fx &= r*cos(s/r); fy &=r*sin(s/r); // definisi ulang persamaan parametrik terhadap s dengan subst
>k &= trigsimp(sqrt(diff(fx,s,2)^2+diff(fy,s,2)^2)); $k // nilai kurvatur lingkaran dengan menggunakan defin
```

Untuk representasi parametrik umum, misalkan

merupakan persamaan parametrik untuk kurva bidang yang terdiferensialkan dua kali. Kurvatur untuk kurva tersebut didefinisikan sebagai

Selanjutnya, pembilang pada persamaan di atas dapat dicari sebagai berikut.

Jadi, rumus kurvatur untuk kurva parametrik

adalah

Jika kurvanya dinyatakan dengan persamaan parametrik pada koordinat kutub

maka rumus kurvturnya adalah

(Silakan Anda turunkan rumus tersebut!)

Contoh:

Lingkaran dengan pusat (0,0) dan jari-jari r dapat dinyatakan dengan persamaan parametrik

Nilai kelengkungan lingkaran tersebut adalah

Hasil cocok dengan definisi kurvatur suatu kelengkungan.

Kurva

dapat dinyatakan ke dalam persamaan parametrik

sehingga kurvturnya adalah

Contoh:

Akan ditentukan kurvatur parabola

```
>function f(x) &= a*x^2+b*x+c; $y=f(x)
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan parabola
>function f(x) &= x^2+x+1; $y=f(x) // akan kita plot kelengkungan parabola untuk a=b=c=1
>function k(x) &= (diff(f(x),x,2))/(1+diff(f(x),x)^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kelengkungan parabola
```

Berikut kita gambar parabola tersebut beserta kurva kelengkungan, kurva jari-jari kelengkungan dan salah satu lingkaran oskulasi di titik puncak parabola. Perhatikan, puncak parabola dan jari-jari lingkaran oskulasi di puncak parabola adalah

sehingga pusat lingkaran oskulasi adalah $(-1/2, 5/4)$.

```
>plot2d(["f(x)", "k(x)"],-2,1, color=[blue,red]); plot2d("1/k(x)",-1.5,1,color=green,>add); ...
plot2d("-1/2+1/k(-1/2)*cos(x)", "5/4+1/k(-1/2)*sin(x)",xmin=0,xmax=2pi,>add,color=blue):
```

Untuk kurva yang dinyatakan dengan fungsi implisit

dengan turunan-turunan parsial

berlaku

sehingga kurvturnya adalah

(Silakan Anda turunkan sendiri!)

Contoh 1:

Parabola

dapat dinyatakan ke dalam persamaan implisit

```
>function F(x,y) &=a*x^2+b*x+c-y; $F(x,y)
>Fx &= diff(F(x,y),x), Fxx &=diff(F(x,y),x,2), Fy &=diff(F(x,y),y), Fxy &=diff(diff(F(x,y),x),y), Fyy &=diff
```

$$2 a x + b$$

$$2 a$$

$$- 1$$

$$0$$

```
>function k(x) &= (Fy^2*Fxx-2*Fx*Fy*Fxy+Fx^2*Fyy)/(Fx^2+Fy^2)^(3/2); $'k(x)=k(x) // kurvatur parabola terseb
```

Hasilnya sama dengan sebelumnya yang menggunakan persamaan parabola biasa.

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegrasikan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva $y=f(x)$ yang diputar mengelilingi sumbu x dari $x=a$ sampai $x=b$, yakni

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)

- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva $y=f(x)$ dari $x=a$ sampai $x=b$ dengan menggunakan rumus:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)

- Apabila fungsi dinyatakan dalam koordinat kutub $x=f(r,t)$, $y=g(r,t)$, $r=h(t)$, $x=a$ bersesuaian dengan $t=t_0$ dan $x=b$ bersesuaian dengan $t=t_1$, maka rumus di atas akan menjadi:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

- Pilih beberapa kurva menarik (selain lingkaran dan parabola) dari buku kalkulus. Nyatakan setiap kurva tersebut dalam bentuk: a. koordinat Kartesius (persamaan $y=f(x)$) b. koordinat kutub ($r=r(\theta)$) c. persamaan parametrik $x=x(t)$, $y=y(t)$ d. persamaan implisit $F(x,y)=0$
- Tentukan kurvatur masing-masing kurva dengan menggunakan keempat representasi tersebut (hasilnya harus sama).
- Gambarlah kurva asli, kurva kurvatur, kurva jari-jari lingkaran oskulasi, dan salah satu lingkaran oskulasinya.

```
>function f(x) &= x^3 - 2*x^2 + x
```

$$x^3 - 2x^2 + x$$

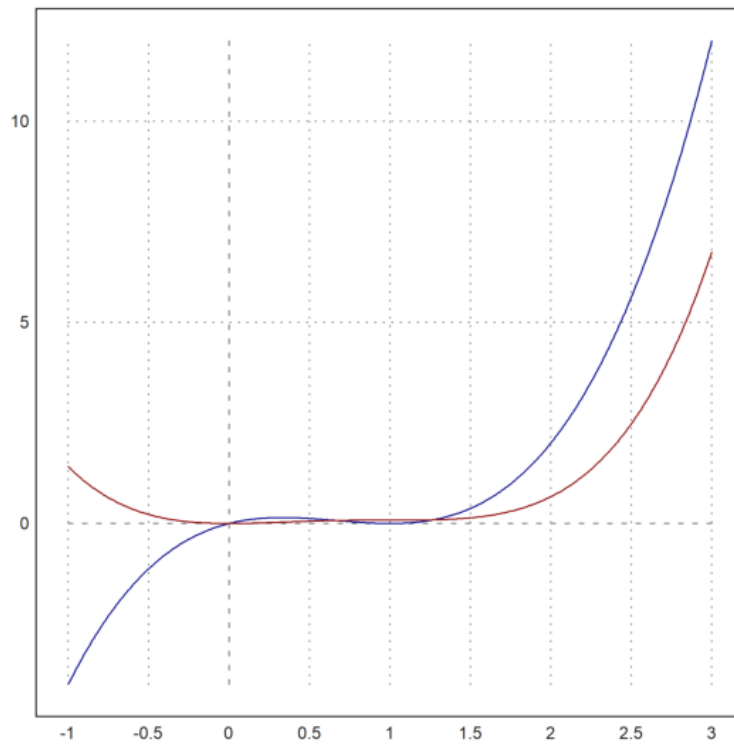
```
>function fy(x) &= integrate(f(x),x); $fy(x)
```

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,2))
```

$$\int_0^2 x^3 - 2x^2 + x dx = \frac{2}{3}$$

```
>plot2d(["f(x)", "fy(x)"], -1, 3, color=[blue, red]):
```



```
>function f(x) &= (3*x + 2)/(x^2 - 1)
```

$$\frac{3x + 2}{x^2 - 1}$$

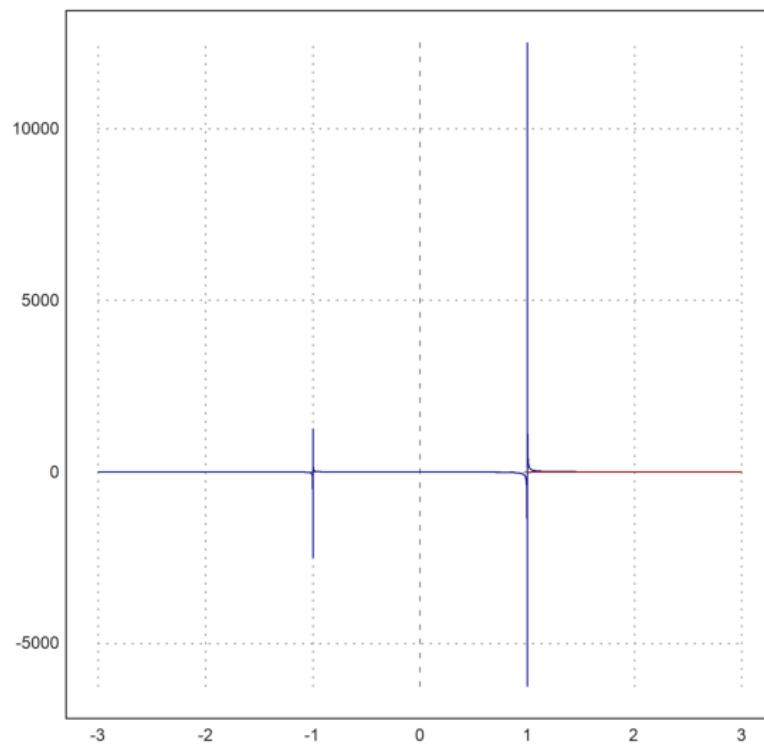
```
>function fy(x) &= integrate(f(x),x); $fy(x)
```

$$\frac{\log(x+1)}{2} + \frac{5 \log(x-1)}{2}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,2,3))
```

$$\int_2^3 \frac{3x+2}{x^2-1} dx = \frac{\log 4}{2} - \frac{\log 3}{2} + \frac{5 \log 2}{2}$$

```
>plot2d(["f(x)", "fy(x)"], -3, 3, color=[blue, red]):
```



```
>function f(x) &= exp(x)
```

$$\begin{matrix} x \\ E \end{matrix}$$

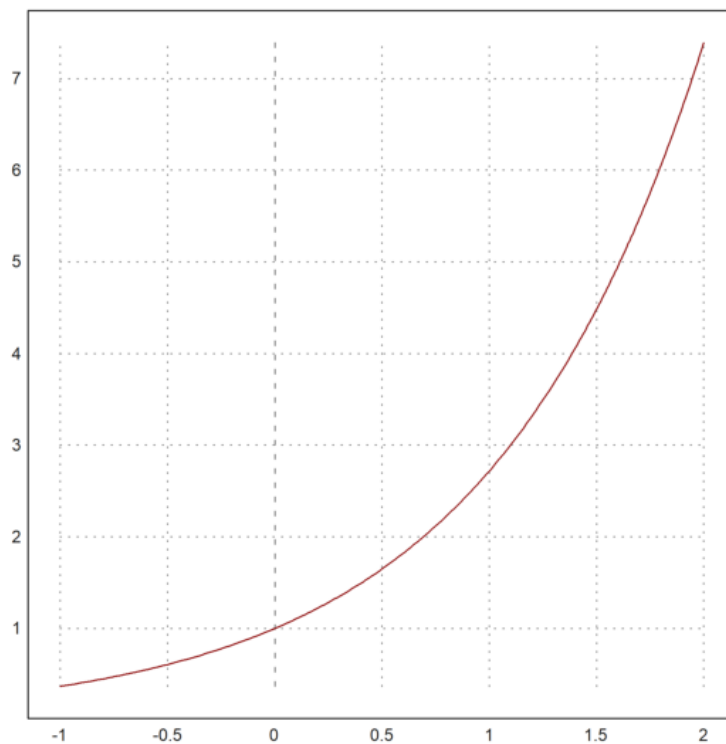
```
>function fy(x) &= integrate(f(x),x); $fy(x)
```

$$e^x$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1$$

```
>plot2d(["f(x)", "fy(x)"],-1,2,color=[blue,red]):
```



```
>function f(x) &= sin(x)
```

$\sin(x)$

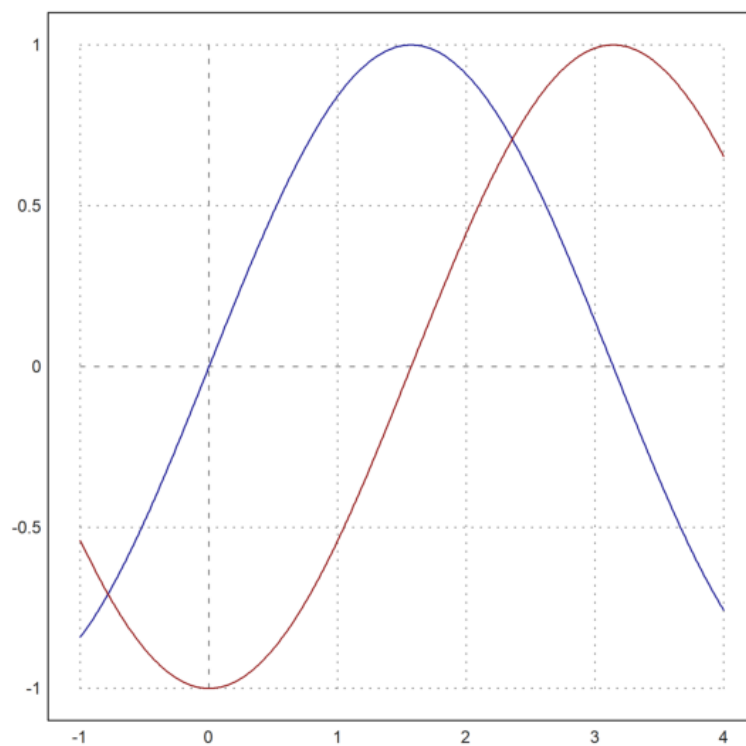
```
>function fy(x) &= integrate(f(x),x); $fy(x)
```

$-\cos x$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,%pi)')
```

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

```
>plot2d(["f(x)", "fy(x)"],-1,4,color=[blue,red]):
```



```
>function f(x) &= sqrt(x); $f(x)
```

$$\sqrt{x}$$

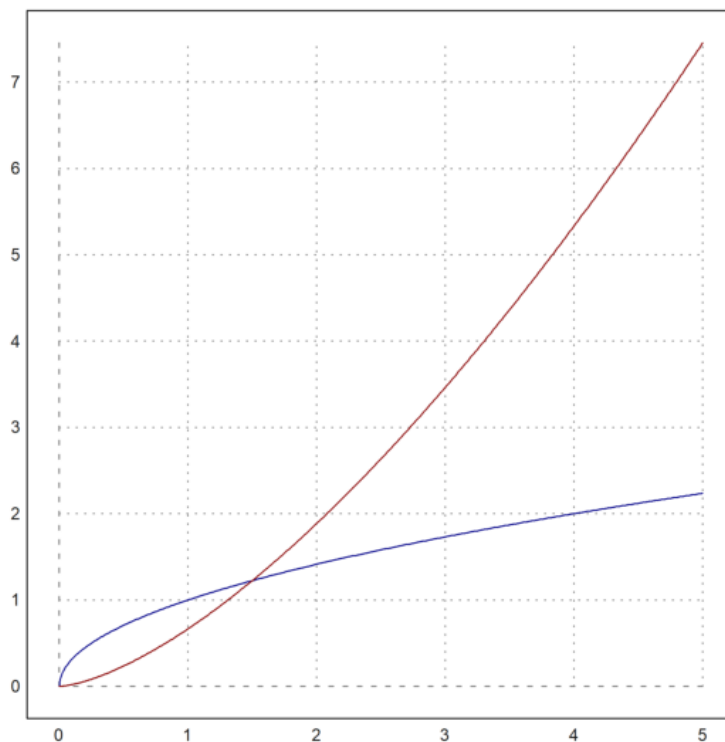
```
>function fy(x) &= integrate(f(x),x); $fy(x)
```

$$\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,4)')
```

$$\int_0^4 \sqrt{x} \, dx = \frac{16}{3}$$

```
>plot2d(["f(x)", "fy(x)"], 0, 5, color=[blue, red]):
```



```
>function f(x) &= exp(x^3)
```

$$e^{x^3}$$

```
>function fy(x) &= integrate(f(x),x); $fy(x)
```

$$\frac{\text{gamma_incomplete}\left(\frac{1}{3}, -x^3\right)}{3}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,4)')
```

$$\int_0^4 e^{x^3} dx = \frac{\text{gamma_incomplete}\left(\frac{1}{3}, -64\right) - \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3}$$

```
>function f(x) &= sin(x^2)
```

$$\sin(x^2)$$

```
>function fy(x) &= integrate(f(x),x); $fy(x)
```

$$\frac{\sqrt{\pi} \left((\sqrt{2}i + \sqrt{2}) \operatorname{erf}\left(\frac{(\sqrt{2}i + \sqrt{2})x}{2}\right) + (\sqrt{2}i - \sqrt{2}) \operatorname{erf}\left(\frac{(\sqrt{2}i - \sqrt{2})x}{2}\right) + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \operatorname{erf}(\sqrt{-1}ix) + (\sqrt{2}i + \sqrt{2}) \operatorname{erf}\left((-1)^{\frac{1}{4}}x\right) \right)}{16}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,%pi)')
```

$$\int_0^{\pi} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi} \left((\sqrt{2}i + \sqrt{2}) \operatorname{erf}\left(\frac{(\sqrt{2}i + \sqrt{2})\pi}{2}\right) + (\sqrt{2}i - \sqrt{2}) \operatorname{erf}\left(\frac{(\sqrt{2}i - \sqrt{2})\pi}{2}\right) + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \operatorname{erf}(\sqrt{-1}\pi) + (\sqrt{2}i + \sqrt{2}) \operatorname{erf}\left((-1)^{\frac{1}{4}}\pi\right) \right)}{16}$$

```
>function f(x) &= cos(x^5)
```

$$\cos(x^5)$$

```
>function fy(x) &= integrate(f(x),x); $fy(x)
```

$$\frac{(i \operatorname{gamma_incomplete}(\frac{1}{5}, i x^5) - i \operatorname{gamma_incomplete}(\frac{1}{5}, -i x^5)) \sin(\frac{\pi}{10})}{10}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,%pi))
```

$$\int_0^{\pi} \cos x^5 dx = \frac{i \operatorname{gamma_incomplete}(\frac{1}{5}, i \pi^5) \sin(\frac{\pi}{10})}{10} - \frac{i \operatorname{gamma_incomplete}(\frac{1}{5}, -i \pi^5) \sin(\frac{\pi}{10})}{10}$$

<