Summen- Regel

Für alle x_0 ,bei denen sowohl die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ als auch die Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = g(x)$ differenzierbar ist, ist auch die Summenfunktion $h(x) = f(x) + g(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar und durch ein gliedweises Ableiten gilt: $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Merkregel

$$\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: \quad (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}'$$

Beweis: Summen- Regel

$$h'(x_0) = \lim_{x_1 \mapsto x_0} \left(\frac{[(f+g)(x_1)] - [(f+g)(x_0)]}{x_1 - x_0} \right)$$

$$h'(x_0) = \lim_{x_1 \mapsto x_0} \frac{[f(x_1) + g(x_1)] - [f(x_0) + g(x_0)]}{x_1 - x_0}$$

$$h'(x_0) = \lim_{x_1 \mapsto x_0} \frac{[f(x_1) - f(x_0)] + [g(x_1) - g(x_0)]}{x_1 - x_0}$$

$$h'(x_0) = \underbrace{\lim_{x_1 \mapsto x_0} \frac{[f(x_1) - f(x_0)]}{x_1 - x_0}} + \underbrace{\lim_{x \mapsto x_0} \frac{[g(x_1) - g(x_0)]}{x_1 - x_0}}$$

$$h'(x_0) = \qquad f'(x_0) \qquad + \qquad g'(x_0)$$

$\Rightarrow \ \forall x_0 \in \mathbb{R}\colon h'(x) = f'(x) + g'(x)$ ∎

Differenz- Regel

Für alle x_0 , bei denen sowohl die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ als auch die Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, y = g(x)$ differenzierbar ist, ist auch die Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar und durch ein gliedweises Ableiten gilt: $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

<u>Merkregel</u>

$$\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: \quad (\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' - \boldsymbol{g}'$$

Beweis: Differenz- Regel

$$h'(x_0) = \lim_{x_1 \mapsto x_0} \left(\frac{[(f-g)(x_1)] - [(f-g)(x_0)]}{x_1 - x_0} \right)$$

$$h'(x_0) = \lim_{x_1 \mapsto x_0} \frac{[f(x_1) - g(x_1)] - [f(x_0) - g(x_0)]}{x_1 - x_0}$$

$$h'(x_0) = \lim_{x_1 \mapsto x_0} \frac{[f(x_1) - f(x_0)] - [g(x_1) - g(x_0)]}{x_1 - x_0}$$

$$h'(x_0) = \underbrace{\lim_{x_1 \mapsto x_0} \frac{[f(x_1) - f(x_0)]}{x_1 - x_0}} - \underbrace{\lim_{x \mapsto x_0} \frac{[g(x_1) - g(x_0)]}{x_1 - x_0}}$$

$$h'(x_0) = \qquad f'(x_0) \qquad - \qquad g'(x_0)$$

$$\Rightarrow \ \forall x_0 \in \mathbb{R}\colon h'(x) = f'(x) - g'(x) \qquad \blacksquare$$