A4 : Tangentes, nombre dérivé et fonction dérivée.

I – Dérivation en un point.

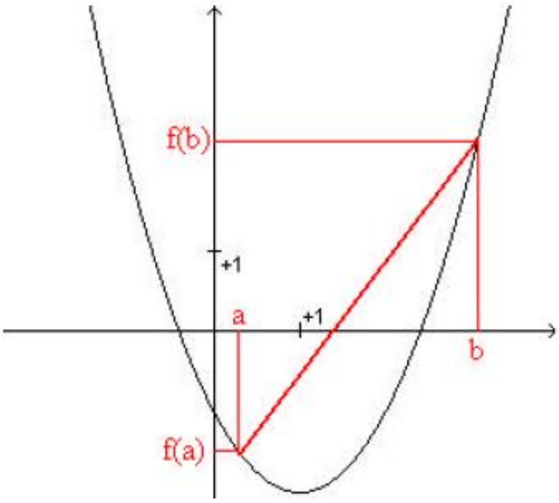
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR.

1 – Accroissement moyen

Soient a et b deux réels de I tels que $a<b$

L'accroissement moyen de f entre a et b est le quotient

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Interprétation graphique :

L'accroissement moyen est le coefficient directeur de la droite (AB), sécante avec lacourbe $\mathbf{C}_f$ en A(a ; $f(a)$) et B(b ; $f(b)$)

2 – Nombre dérivé et Fonction dérivable

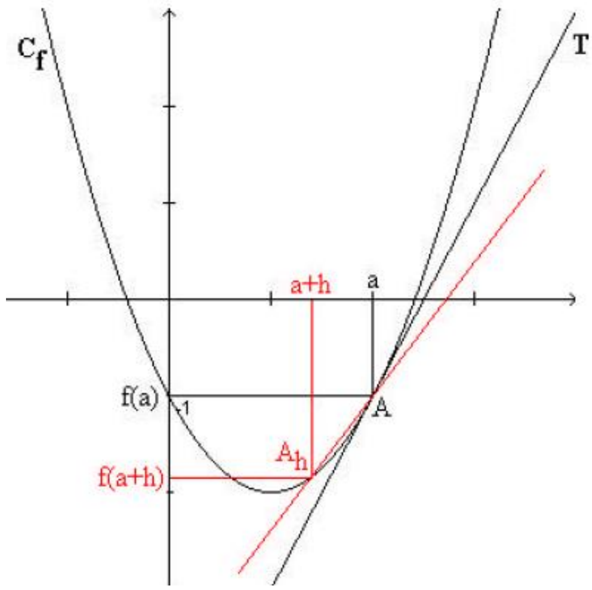
Soit a un réel de I et h un réel non nul.

f est dérivable en a si et seulement si :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe et est finie.}$$

On note $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

***f*'(a)** est appelé **nombre dérivé** de f en a



Interprétation graphique :

Le nombre dérivé est la valeur limite du coefficient directeur des droites (AA_h) lorsque le point A_h se rapproche de A. Ainsi :

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en A(a ; $f(a)$) à la courbe C_f qui représente la fonction f.

La tangente en A(a ; $f(a)$) a pour équation : $\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$

II/ Fonction dérivée et sens de variation :

Définition : On nomme fonction dérivée la fonction qui à une abscisse *x* donnée, associe le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathbf{C}_f$. On nomme cette fonction avec un ' . Ainsi la fonction dérivée de f se nomme f '.

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- **Si, pour tout *x* de I, $f'(x) > 0$, alors *f* est strictement croissante sur I.**
- **Si, pour tout *x* de I, $f'(x) < 0$, alors *f* est strictement décroissante sur I.**
- **Si, pour tout *x* de I, $f'(x) = 0$, alors *f* est constante sur I.**

Nous admettrons ces propriétés, cependant elles peuvent se comprendre. En effet si la fonction est croissante, la tangente est elle aussi croissante, donc son coefficient directeur est positif, donc la fonction dérivée est positive. Et inversement, si la fonction est décroissante, sa tangente l'est aussi, donc le coefficient directeur de la tangente est aussi négatif, donc la fonction dérivée est négative.

Exemple :

Soit f une fonction définie et dérivable sur [1 ; 5]. On note f ' sa dérivée.

Signe de f ' :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Sur [-∞ ; - 0,2] on lit dans le tableau de signe que la fonction f ' est négative, donc on en déduit que la fonction f est décroissante. Ce qui se traduira par une flèche vers le bas dans le tableau de variation de la fonction.

Sur [-0,2 ; +∞] on lit dans le tableau de signe que la fonction f ' est positive, donc on en déduit que la fonction f est croissante. Ce qui se traduira par une flèche vers le haut dans le tableau de variation de la fonction.

On en déduit donc le tableau de variation suivant pour f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{16}{5}$		$+\infty$

Conséquences :

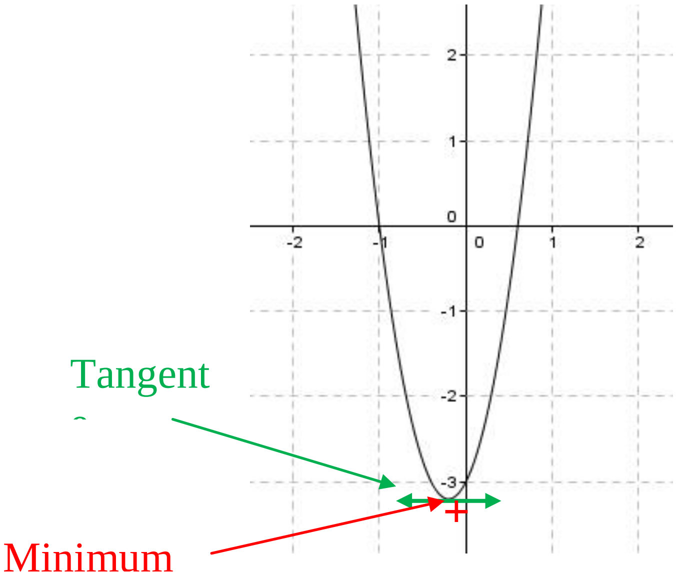
Si f' s'annule en c, avec $c \in$ I alors :

f admet une tangente horizontale en c

Si f' s'annule en changeant de signe en c alors :

f admet un extrémum en c.

(maximum ou minimum)



III/ Calculs de dérivée :

1) Dérivées de fonctions usuelles

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f(x) = k \quad (k \in \mathbb{R})$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$

IV/ Méthode pour l'étude de fonction ;

Les sujets de bac demandent souvent d'étudier les variations d'une fonction. C'est-à-dire d'être capable de dresser le tableau de variation d'une fonction. Pour cela il suffit de :

- Dériver la fonction à étudier.
- Dresser le tableau de signe de la dérivée obtenue.
- Dresser le tableau de variation.

Rappel pour l'étude de signe de la dérivée :

La dérivée obtenue sera souvent un mélange entre des fonctions du premier degré (fonctions affines) et fonctions du second degré (fonctions avec du x^2). Nous allons donc résumer les informations déjà connues sur le signe de ces fonctions :

Fonctions affines

Forme de la fonction :

$$ax + b$$

signe de la fonction :

La fonction s'annule en –b/a et le signe dépend du signe de a :

- Si a > 0, la fonction est négative puis positive (car elle est croissante)
- Si a < 0, la fonction est positive puis négative (car elle est décroissante)