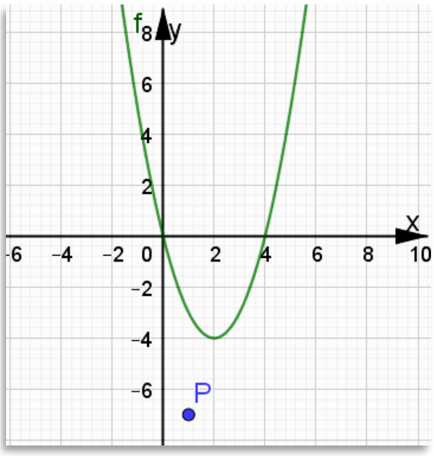
Tangente t mit $P \in t$

Gegeben: Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x$ und der Punkt P mit $P = (1|-7)$.

Gesucht: Gleichungen von *allen* Tangenten t mit $P \in t$.



Lösung:

1. Bestimmen der Berührpunkte B:

Ansatz: $t(x; x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

und $B = (x_0;\ f(x_0))$.

Aus $P \in t$ ergibt sich mit $P = (1|-7)$:

$t(1; x_0) = -7$

Eingesetzt und vereinfacht:

$$\begin{aligned}(2x_0 - 4) \cdot (1 - x_0) + {x_0}^2 - 4x_0 &= -7 \\ 2x_0 - 2x_0^2 - 4 + 4x_0 + {x_0}^2 - 4x_0 &= -7 \\ x_0^2 - 2x_0 - 3 &= 0\end{aligned}$$

$$x_0 = -1 \text{ } oder \text{ } x_0 = 3$$

(abc-Formel)

Funktionswerte: $f(-1) = 5;\ f(3) = -3$

Also zwei Berührpunkte: $B_1 = (-1|5)$ und $B_2 = (3|-3)$.

2. Gleichungen der Tangenten t_1 und t_2 bestimmen:

Auf t_1 liegen die Punkte P und $B_1 = (-1|5)$.

Die Gleichung der Tangente t_1 ergibt sich aus:

$$t(x; x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$\begin{aligned} t_1(x; -1) &= f'(-1) \cdot (x - (-1)) + f(-1) \\ &= -6(x + 1) + 5 \\ &= \boldsymbol{-6x - 1} \end{aligned}$$

Auf t_2 liegen die Punkte P und $B_2 = (3| - 3)$.

Die Gleichung der Tangente t_2 ergibt sich aus:

$$t(x; x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$\begin{aligned} t_2(x; 3) &= f'(3) \cdot (x - 3) + f(3) \\ &= 2 \cdot (x - 3) - 3 \\ &= \boldsymbol{2x - 9} \end{aligned}$$

Illustration: