Ejercicios tipo Selectividad sobre programación lineal. Parte II

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
1ºBach	progLineal 05	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

INFORMACIÓN GENERAL

Segunda parte de ejercicios resueltos de Selectividad de cursos anteriores sobre programación lineal. Ejercicios de distribución. Consejos finales para estos problemas.

Vídeo asociado:

https://youtu.be/6f3W23P3r8A

Geogebra asociado:

https://www.geogebra.org/m/ydxufpgf

EJERCICIO 1

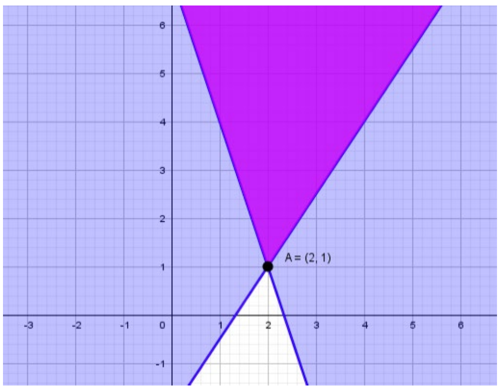
Sea la región del plano limitada por las inecuaciones:

$$\mathbf{3x + y \geq 7}$$
$$\mathbf{3x - 2y \leq 4}$$

Sea la función objetivo:

$$\boldsymbol{f(x,y) = 3x + y}$$

Obtener su máximo y su mínimo en la región factible.



Dibujamos la región factible. Es no acotada.

¡Ojo al dato de no acotada! Tras obtener la imagen que genera el punto A, deberemos tomar un punto de cada uno de los lados infinitos y comprobar si aumentan o disminuyen la imagen generada por A en la función objetivo.

Los vértices de la región factible se obtienen planteando sistemas 2x2 con las dos rectas que forman el vértice.

La imagen de $f(x,y) = 3x + y$ en el vértice A(2,1) resulta:

$$f(2,1) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

¿Es un máximo? ¿Es un mínimo? ¿Es la única solución? En el vértice A confluyen dos lados infinitos. Tomamos un punto de cada lado.

$(4,4) \rightarrow f(4,4) = 3 \cdot 4 + 4 = 16$

$(0,7) \rightarrow f(0,7) = 0 + 7 = 7 \rightarrow$ Iguala el valor de $f(2,1)$

Consecuencia: **todos los puntos del lado de la región factible que pasa por A y sube hacia la izquierda, minimizan a la función objetivo (infinitos mínimos)**.

No hay máximos, ya que los puntos del lado que pasa por A y sube hacia la derecha, van tomando imágenes cada vez más grandes.

EJERCICIO 2

¿Pertenecen los puntos $P(1,2)$ y $Q(2,5)$ al conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones $\left\{\begin{matrix} 2x+y>4 \\ x-2y<8 \end{matrix}\right\}$?

Si no lo pide el enunciado, podemos resolver sin necesidad de dibujar la solución gráfica. Podemos comprobar, para cada punto, si cumple ambas inecuaciones.

$P(1,2) \rightarrow \left\{\begin{matrix} 2\cdot 1+2 \rightarrow 4>4 \rightarrow Absurdo \\ 1-2\cdot 2 \rightarrow -3<8 \rightarrow Verdadero \end{matrix}\right\} \rightarrow$ el punto $P(1,2)$ no pertenece a la solución.

$Q(2,5) \rightarrow \left\{\begin{matrix} 2\cdot 2+5 \rightarrow 9>4 \rightarrow Verdadero \\ 2-2\cdot 5 \rightarrow -8<8 \rightarrow Verdadero \end{matrix}\right\} \rightarrow$ el punto $Q(2,5)$ sí pertenece a la solución.

EJERCICIO 3

Indica la posición de los puntos $P(1,2)$ y $Q(5,1)$ en relación con la región solución que satisface el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{matrix} x+2y\leq 12 \\ 2x+y\geq 4 \\ x-2y\leq 6 \\ x-y\geq 0 \\ x\leq 8 \end{matrix}\right\}$$

Si el punto es exterior, indica qué desigualdades cumple.

$$P(1,2)\rightarrow\left\{\begin{matrix} 1+2\cdot 2\leq 12\rightarrow 5\leq 12\rightarrow Verdadero \\ 2\cdot 1+2\geq 4\rightarrow 4\geq 4\rightarrow Verdadero(cumple\ signo\ igual) \\ 1-2\cdot 2\leq 6\rightarrow -3\leq 6\rightarrow Verdadero \\ 1-2\geq 0\rightarrow -1\geq 0\rightarrow Absurdo \\ 1\leq 8\rightarrow Verdadero \end{matrix}\right\}\rightarrow P(1,2)\text{ punto exterior}$$

$$Q(5,1)\rightarrow\left\{\begin{matrix} 5+2\cdot 1\leq 12\rightarrow 7\leq 12\rightarrow Verdadero \\ 2\cdot 5+1\geq 4\rightarrow 11\geq 4\rightarrow Verdadero \\ 5-2\cdot 1\leq 6\rightarrow 3\leq 6\rightarrow Verdadero \\ 5-1\geq 0\rightarrow 4\geq 0\rightarrow Verdadero \\ 5\leq 8\rightarrow Verdadero \end{matrix}\right\}\rightarrow Q(5,1)\text{ cumple desigualdades}$$

El punto $Q(5,1)$ cumple todas las desigualdades, aunque nunca cumple estrictamente el signo igual. Por lo tanto, el punto $Q(5,1)$ se encuentra en el interior de la región factible.

EJERCICIO 4

Una empresa fabrica pintura de dos tipos: mate y brillante. Para ello mezcla dos productos A y B en distintas proporciones. Cada kg de pintura mate necesita 0,4kg de producto A y 0,6kg de producto B. Cada kg de pintura brillante necesita 0,2kg de producto A y 0,8kg de producto B.

La empresa posee un máximo de 200kg de producto A y un máximo de 500kg de producto B. Además, por razones comerciales, quiere fabricar al menos 200kg de pintura mate y al menos 300kg de pintura brillante.

El beneficio por kg de pintura mate es de 4€ y el beneficio por kg de pintura brillante es de 5€. ¿Qué cantidad de cada tipo de pintura debe fabricar la empresa para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el beneficio máximo que obtendrá? ¿Con la solución óptima, sobra alguna cantidad de los productos A y B?

Las variables serán el número de kg que debe fabricar de pintura mate y brillante.

	kg	Beneficio por cada kg (€)	Beneficio
Pintura mate	x	4	4·x
Pintura brillante	y	5	5·y

El beneficio total es nuestra función objetivo a maximizar:

$$f(x, y) = 4x + 5y$$

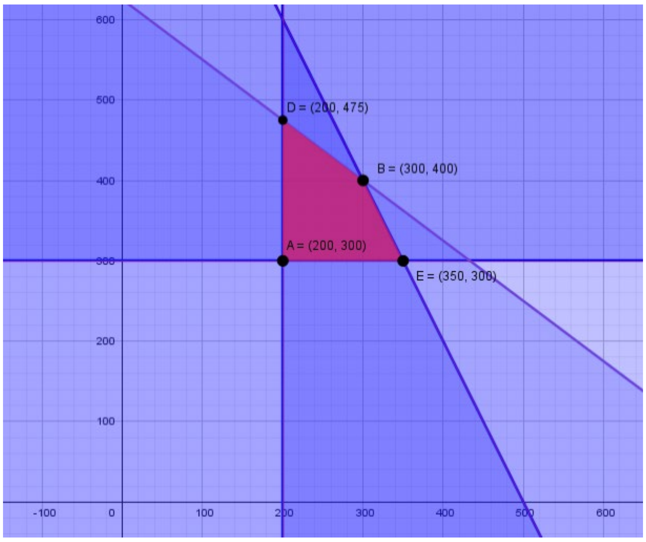
Conjunto de restricciones:

- Cada kg mate posee 0,4kg de producto A y cada kg brillante posee 0,2kg de producto A. La cantidad máxima de A que posee la empresa es 200kg, por lo que existe un límite superior de material: $0{,}4x + 0{,}2y \leq 200$
- Cada kg mate posee 0,6kg de producto B y cada kg brillante posee 0,8kg de producto B. La cantidad máxima de B que posee la empresa es 500kg, por lo que tendremos otro límite superior de material: $0{,}6x + 0{,}8y \leq 500$
- Deben fabricarse al menos 200kg mate $\rightarrow x \geq 200$
- Deben fabricarse al menos 300kg brillante $\rightarrow y \geq 300$
- Como es costumbre en estos ejercicios, el número de kg mate y brillante no pueden ser negativos $\rightarrow x \geq 0, y \geq 0$. Aunque estas dos inecuaciones no aportan restricciones nuevas, ya que hemos indicado que al menos hay 200kg de mate y al menos 300kg de brillante.

Poseemos un sistema de cuatro inecuaciones lineales de dos incógnitas.

La región factible es acotada, por lo que sabemos que el problema de programación lineal tiene solución. Los lados y los vértices pertenecen a la región factible por aparecer el signo igual en todas las inecuaciones.

Obtenemos la imagen de la función objetivo $f(x, y) = 4x + 5y$ en los vértices:



$f(200,300) = 4 \cdot 200 + 5 \cdot 300 = 2.300$

$f(350,300) = 4 \cdot 350 + 5 \cdot 300 = 2.900$

$f(300,400) = 4 \cdot 300 + 5 \cdot 400 = 3.200$

$f(200,475) = 4 \cdot 200 + 5 \cdot 475 = 3.175$

El beneficio máximo es igual a $3.200€$ y se alcanza fabricando 300kg de pintura mate y 400kg de pintura brillante (solución única). Con esas condiciones óptimas:

- Se consumen $0{,}4 \cdot 300 + 0{,}2 \cdot 400 = 200kg$ de producto A → **No sobra producto A**.
- Se consumen $0{,}6 \cdot 300 + 0{,}8 \cdot 400 = 500kg$ de producto B → **No sobra producto B**.

EJERCICIO 5

Una empresa tiene dos plantas de producción P1 y P2 de cierto artículo que vende en tres ciudades C1, C2 y C3. En la planta P1 produce 5.000 unidades y en P2 produce 7.000 unidades.

El total de 12.000 unidades fabricadas las vende así: 3.500 en la ciudad C1, 4.000 en C2 y 4.500 en C3. Los costes de transporte, en euros por unidad de producto, desde las plantas de producción a los centros de ventas son los siguientes:

	a C1	a C2	a C3
Desde P1	30	25	35
Desde P2	22,5	37,5	40

Determina cuántos artículos debe enviar la empresa desde cada planta a cada ciudad para que los costes de transporte sean mínimos.

Las variables serán el número de artículos que debemos enviar desde la planta P1 a cada ciudad, ya que la cantidad que se manda desde P2 depende de la primera planta. Fíjate bien en la siguiente tabla, ya que **se razona de forma diferente a los ejercicios anteriormente resueltos sobre problemas de contexto porque el coste se coloca en forma de fila y no en forma de columna (esto ocurre en los problemas de distribución)**.

Destino ----------- **Origen**	**nº artículos a C1** (los que salen de P2 dependen de los que ya han salido de P1, porque a C1 deben llegar 3.500)	**nº artículos a C2** (los que salen de P2 dependen de los que ya han salido de P1, porque a C2 deben llegar 4.000)	**nº artículos a C3** (los que salen de P2 dependen de los que ya han salido desde P1, porque a C3 deben llegar 4.500)
P1 genera 5.000 unidades	x	y	**5.000 – (x + y) → 5.000 – x – y** Fíjate que la suma x + y + 5.000 – x – y da como resultado los 5.000 que genera P1
P2 genera 7.000 unidades	3.500 - x	4.000 - y	**4.500 - [5.000 – (x + y)] → -500 + x + y** Fíjate que 3.500 – x + 4.000 – y – 500 + x +y da como resultado los 7.000 que genera P2
Coste	30 x + 22,5(3.500 - x)	25 y + 37,5 (4.000 - y)	35[5.000 – x - y] + 40[-500 + x + y]

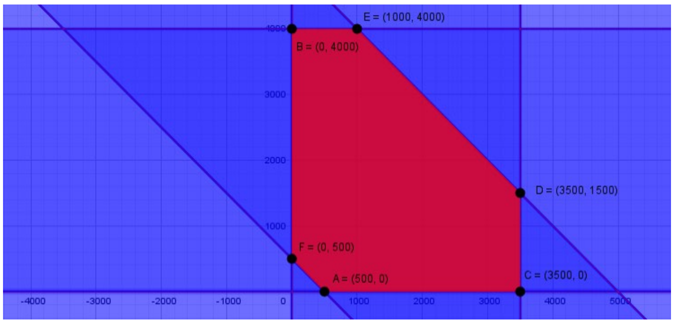
El coste total es nuestra función objetivo a minimizar. Debemos sumar el coste del envío a cada una de las ciudades.

$$f(x,y) = 30x + 78.750 - 22{,}5x + 25y + 150.000 - 37{,}5y + 175.000 - 35x - 35y + 80.000 + 40x + 40y$$

$$\boldsymbol{f(x,y) = 12,5x - 7,5y + 83.750}$$

Conjunto de restricciones:

- Las variables no pueden ser negativas. Es decir, P1 envía a C1 y a C2 cantidades no negativas $\rightarrow x \geq 0, y \geq 0$
- P1 envía a C3 una cantidad no negativa $\rightarrow 5.000 - x - y \geq 0 \rightarrow x + y \leq 5.000$
- P2 envía a C1 una cantidad no negativa $\rightarrow 3.500 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 3.500$
- P2 envía a C2 una cantidad no negativa $\rightarrow 4.000 - y \geq 0 \rightarrow y \leq 4.000$
- P2 envía a C3 una cantidad no negativa $\rightarrow -500 + x + y \geq 0 \rightarrow x + y \geq 500$



Poseemos un sistema de seis inecuaciones lineales de dos incógnitas. La región factible es acotada, por lo que sabemos que el problema de programación lineal tiene solución.

Los lados del polígono y los vértices pertenecen a la solución porque aparece el signo igual en todas las inecuaciones.

Obtenemos la imagen de la función objetivo $f(x, y) = 12{,}5x - 7{,}5y + 83.750$ en los vértices:

$f(500{,}0) = 90.000$

$f(0{,}500) = 4 \cdot 350 + 5 \cdot 300 = 80.000$

$f(3.500{,}0) = 127.500$

$f(3.500{,}1.500) = 116.250$

$f(1.000{,}4.000) = 66.250$

$f(0{,}4.000) = 53.750$

El coste mínimo es de 53.750€ y se consigue en el vértice $(0, 4.000)$, tal y como refleja la siguiente tabla resumen de los envíos de los artículos desde las plantas de producción P1 y P2 a las ciudades C1, C2 y C3 (donde hemos aplicado los valores x=0, y=4.000).

Destino ----------- Origen	**C1 (3.500)**	**C2 (4.000)**	**C3 (4.500)**
P1 (5.000)	0	4.000	1.000
P2 (7.000)	3.500	0	3.5000

CONSEJOS FINALES PARA AFRONTAR LOS EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

- Si aparece un único punto óptimo, hablaremos de región factible con solución única.
- Si los puntos óptimos aparecen a lo largo de todo un segmento entre dos vértices, tendremos región factible con infinitas soluciones para el problema de optimización.
- Cuando no existe límite máximo al valor de la imagen de la función objetivo, y se puede hacer tan grande como se desee, diremos que no hay máximo. Y si la imagen se puede hacer tan pequeña como se desee, diremos que no hay mínimo.
- Si no existe una región factible sobre la que aplicar una función objetivo, diremos que la región es no factible porque las inecuaciones generan restricciones inconsistentes (es imposible cumplir todas las condiciones).
- No olvidar las dos condiciones de positividad $x \geq 0$, $y \geq 0$ si las variables lo requieren. No suele decirse de manera explícita en el enunciado de los problemas de contexto.
- Si me piden comprobar si un punto $P(x_{0,}y_0)$ pertenece a una región factible, no se hace a ojo. Se comprueba que el punto cumple una a una todas las inecuaciones.
- Un punto $P(x_{0,}y_0)$ puede ser interior a una región factible, o bien un punto en la frontera o bien un punto exterior. Es exterior cuando, al menos, no cumple una de las inecuaciones. Está en la frontera cuando cumple el signo igual que aparece en al menos una de las inecuaciones no estrictas y cumple el resto de las inecuaciones. Y es interior cuando cumple todas las inecuaciones de manera estricta (sin el signo igual).
- La forma general de la función objetivo es $f(x,y) = ax + by + c$. En muchos ejercicios tipo Selectividad el término independiente c es 0. Pero podría ser cualquier valor real.