Dokumentation zum Arbeitsblatt Messungen in der Quantenmechanik

Martin Schwingenheuer (Text u. Idee), Alfred Fuchs (GeoGebra)

Der Zustand eines zu beschreibenden physikalischen Systems wird durch einen Vektor u in einem durch das System bestimmten Hilbertraum $\mathbb{H}$ beschrieben. Ein Hilbertraum ist ein Vektorraum mit besonderen Eigenschaften, unter anderem existiert ein Skalarprodukt. Der schwarz dargestellte Vektor u symbolisiert diesen Zustandsvektor. Zu jeder physikalischen Größe x (wie z.B. Energie oder Position) existiert eine selbstadjungierte, lineare Abbildung $A_x\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Selbstadjungiert heißt, dass gilt:

$$(A_x v, w) = (v, A_x w),$$

wobei (v, w) das Skalarprodukt der beiden Vektoren v, w bezeichnet. Selbstadjungierte lineare Abbildungen haben die besondere Eigenschaft, dass es eine Basis des Vektorraumes bestehend aus Eigenvektoren gibt und dass die Eigenwerte reell sind. Desweiteren sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal. Um zu erklären was ein Eigenvektor ist, mache man sich bewußt, dass die lineare Abbildung einen beliebigen Vektor im Allgemeinen dreht und streckt (bzw. staucht). Manche Vektoren werden allerdings nur gestreckt und nicht gedreht, es gilt somit $A_x v \parallel v$ oder was dasselbe ist $A_x v = \lambda v$ für einen Skalar λ. Eine Messung an einem physikalischen System ist quantenphysikalisch nicht beliebig behutsam, wie man sich das bei einem klassischen System so vorstellt. Führt man an einem physikalischen System eine Messung zu einer physikalischen Größe x durch, so wird der Zustandsvektor u auf einen der Eigenvektoren der zugehörigen selbstadjungierten Abbildung gezwungen. Auf welchen ist nicht vorhersagbar, lediglich die Wahrscheinlichkeit mit der ein bestimmter dieser Eigenvektoren ausgewählt wird kann man angeben. Das Meßergebnis ist dann der zu diesem Eigenvektor gehörige Eigenwert (der oben mit λ bezeichnete, reelle Skalar). Da es wie oben beschrieben zu einer selbstadjungierten Abbildung eine Basis aus Eigenvektoren gibt, kann man den Zustandsvektor u als Linearkombination aus den Eigenvektoren schreiben:

$$u = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das System auf den Eigenvektor v_i (wobei das Meßergebnis λ_i ist) gezwungen wird berechnet sich zu

$$P(x = \lambda_i) = |a_i|^2,$$

falls der Zustandsvektor zuvor normiert wurde (d.h. $|u|^2 = (u, u) = 1$). In dem Arbeitsblatt wird dieser Sachverhalt für $\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$ dargestellt. Die Koordinatenachsen stellen die Richtungen der (senkrechten) Eigenvektoren von der selbstadjungierten linearen Abbildung zu einer fiktiven physikalischen Grösse dar. Drückt man den mit Messung gekennzeichneten Button so wird dargestellt auf welche der Eigenrichtungen der Zustandsvektor gezwungen wird. Um den Zufallscharakter des Messprozeßes zu verstehen, wird in dem Arbeitsblatt eine Messung an ein und demselben physikalischen System im festen Zustand u immer wieder wiederholt. Das ist natürlich keine realistische Situation, da sich ja nach der ersten Messung das System in dem Zustand zu einem Eigenvektor befindet. Vielmehr aus didaktischen Erwägung kann man die Messung an einem im Zustand u präparierten System wieder und wieder durchführen und überprüfen, dass sich die relativen Häufigkeiten mehr und mehr den Quadraten der Absolutbeträge der Koeffizienten in der zugehörigen Linearkombination annähern.