

Inequação Exponencial

Cleivaldo Correa Pantoja
Fabio José Alves

O avanço comercial do século XVII fez surgirem o cálculo exponencial e os logaritmos. A partir daí, durante os três séculos que se seguiram, essas ferramentas foram utilizadas como meios sofisticados de resolução de cálculos.

À medida que os estudos nesses campos foram evoluindo, os cálculos exponenciais e logarítmicos foram se tornando decisivos para a evolução da matemática e, conseqüentemente, das várias outras ciências que dela dependem.

Inequações exponenciais

Assim como as equações exponenciais, as inequações exponenciais são aquelas que apresentam a incógnita no expoente. Confira alguns exemplos:

$$\triangleright 2^x \geq 128$$

$$\triangleright \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\triangleright 4^x + 4 > 5 \cdot 2^x$$

$$\triangleright \begin{cases} 2^x \leq 8 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases}$$

Resolução de inequações exponenciais

A resolução de uma inequação exponencial poderá ser dada através das propriedades da potenciação. Mas lembre-se de que $f(x) = a^x$ somente é crescente quando $a > 1$. Caso $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ é decrescente.

Antes de resolver uma inequação exponencial, deve-se observar a situação das bases nos dois membros, caso as bases sejam diferentes, reduza-as a uma mesma base e, em seguida, forme uma inequação com os expoentes. Atente-se as regras dos sinais:

- Caso $a > 1$, mantenha o sinal original.
- Caso $0 < a < 1$, inverta o sinal.

Essas regras serão mais bem visualizadas nas resoluções que se seguem. Vamos resolver os exemplos das inequações anteriores.

$$2^x \geq 128$$

Por fatoração, $128 = 2^7$. Portanto:

$2^x \geq 2^7 \rightarrow$ como as bases são iguais e $a > 1$, basta formar uma inequação com os expoentes.

$$x \geq 7$$

$$S = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 7\}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Neste exemplo as bases já são iguais. Porém, é necessário observar que $0 < a < 1$. Diante dessa condição, inverte-se o sinal.

$$x > 2.$$

$$S = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 2\}$$

$$4^x + 4 > 5 \cdot 2^x$$

Perceba que, por fatoração, $4^x = 2^{2x}$ e 2^{2x} é o mesmo que $(2^x)^2$. Reescrevendo a inequação, temos:

$$(2^x)^2 + 4 > 5 \cdot 2^x$$

Chamando 2^x de t , para facilitar a resolução, ficamos com:

$$t^2 + 4 > 5t$$

$$t^2 - 5t + 4 > 0$$

Aqui temos uma inequação de 2º grau, onde deve ser feito o estudo dos sinais. Não vamos mostrar o processo de resolução da inequação de 2º grau, visto que o texto trata das exponenciais. Fica como sugestão de exercícios para os leitores.

Ao resolver, você encontrará $D = 9$, $t_1 = 1$ e $t_2 = 4$. Como $a > 0$, a concavidade da parábola ficará para cima. Isso significa que, como estamos procurando valores que tornem a inequação positiva, ficamos com:

$$t < 1 \text{ ou } t > 4.$$

Retornando à variável inicial:

$$t = 2^x$$

$2^x < 1 \rightarrow x < 0 \rightarrow$ lembre-se que todo número elevado a 1 é igual ao próprio número, e que todo número elevado a zero é igual a 1.

$$2^x > 4 \rightarrow 2^x > 2^2 \rightarrow x > 2.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 2\}$$

$$\begin{cases} 2^x \leq 8 \\ 3x - 6 > 0 \end{cases}$$

$$2^x \leq 8 \rightarrow 2^x \leq 2^3 \rightarrow x \leq 3 \text{ (S}_1\text{)}$$

$$3x - 6 > 0 \rightarrow 3x > 6 \rightarrow x > 2 \text{ (S}_2\text{)}$$

A solução final é dada pela interseção das duas soluções encontradas.

$$S = S_1 \cap S_2$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$$

Referências bibliográficas:

YOUSSEF, Antonio Nicolau (et al.). **Matemática: ensino médio, volume único.** – São Paulo: Scipione, 2005.

IEZZI, Gelson (et al.). **Matemática: ciência e aplicações, 1: ensino médio.** – 6. ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.