*Equations et inéquations logarithmiques :*

**Ex.1**

Résoudre dans IR :

1) $\ln(x+1) - \ln(x+3) = \ln 2$

2) $\ln(x-2) + \ln(x+1) = \ln 4$

3) $\ln^2 x - 4\ln x + 3 = 0$

4) $\ln x - \ln(x+3) < \ln 2$

5) $\ln(x+2) + \ln(x-3) \geq \ln 6$

*Intégrales logarithmiques :*

**Ex.2**

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}dx$ 2) $\int_0^1 \frac{t^3+2t}{1+t^2}dt$ 3) $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$ 4) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx$

6) $\int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}dx$ 7) $\int_1^e x.\ln(x)dx$ 8) $\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x}dx$

**Ex.3**

Soit f la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$.

et g la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par $g(x) = x\, f(x)$ .

Vérifier que $f(x) = g'(x) + \frac{2}{x-2}$ et déterminer sur $]2\,;+\infty[$ une primitive F de f.

## *Problèmes*

**1.** Soit la fonction f définie, sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$, par $f(x) = x - \ln(x)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

1) Etudier les variations de f.

2) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (d) d'équation $y = x$.

3) Tracer (C). (On tracera en particulier le point de (C) d'abscisse e).

4) a – Montrer que f admet dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$ une fonction réciproque g, indiquer le domaine de définition de g et tracer sa courbe représentative (G) dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

b – Calculer $g'(e-1)$.

**2.** On considère la fonction $f : x \longmapsto x + 1 - \dfrac{\ln x}{x}$ définie pour $x > 0$ et l'on désigne par $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

1) Montrer que $f'(1) = 0$ et trouver l'équation de la tangente à $(C)$ au point $A(1\,,2)$ de $(C)$.

2) Soit la fonction $g : x \longmapsto x^2 - 1 + \ln x$ définie pour $x > 0$.

a - Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b - Étudier les variations de $g$.

c - En déduire le signe de $g(x)$ pour $x > 0$.

3) a - Montrer que $(C)$ admet une asymptote oblique $(D)$ au voisinage de $+\infty$.
Étudier la position de $(C)$ et $(D)$.

b - Étudier les variations de $f$.

c - Montrer que $(C)$ admet un point d'inflexion $B$ que l'on déterminera.

d - Tracer $(D)$ et $(C)$.

e - Calculer l'aire du domaine limité par $(C)$, $(D)$ et les deux droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$

**3.** Soit $f$ la fonction définie sur $]1\,; +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x \ln x}$ et on désigne par $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,, \vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ et en déduire une asymptote à $(C)$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Démontrer que la droite $(d)$ d'équation $y = x$ est une asymptote à $(C)$ et étudier la position de $(C)$ par rapport à $(d)$.

3) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f$ est strictement croissante.
Dresser le tableau de variations de $f$.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une racine unique $\alpha$ et vérifier que $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

5) Tracer $(d)$ et $(C)$.

6) Calculer l'aire $A$ du domaine limité par la courbe $(C)$, la droite $(d)$ et les deux droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$.

**4. A** - Soit $g$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x + \ln x$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et dresser le tableau de variations de g.

2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$, et vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$.

3) Déterminer suivant les valeurs de x le signe de g(x).

**B** - On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x(2\ln x + x - 2)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déterminer f(e).

2) Démontrer que $f(\alpha) = -\alpha(\alpha+2)$ .

3) Vérifier que $f'(x) = 2g(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer (C). (0n prendra $\alpha = 0,55$).

5) Utiliser une intégration par parties pour calculer $\int_{0,5}^{1} x.\ln x\,dx$ et déduire l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0,5$ et $x = 1$.

**5.** On considère les deux fonctions f et g définies sur $]\,0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \ln x$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x} + x - 1$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1) a - Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b - Etudier les variations de g et en déduire le signe de g(x) pour $x > 0$.

2) a- Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à (C).

b- Étudier la position relative de (C) et (d).

c- Trouver une autre asymptote à (C).

3) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variations de f.

4) Montrer que la tangente (D) à (C) au point A de (C) d'abscisse 1 est parallèle à (d).

5) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une racine unique $\alpha$ et vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$. (Dans la suite on prend $\alpha = 0,5$)

6) Tracer (D) , (d) et (C).

7) a- Montrer que f admet dans l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$ une fonction réciproque h.

b- Indiquer le domaine de définition de h et tracer sa courbe représentative (C')

8) a- Calculer $I = \int_{\alpha}^{1} f(x)dx$ en fonction de $\alpha$ et puis donner une valeur approchée de I à $10^{-2}$ près.

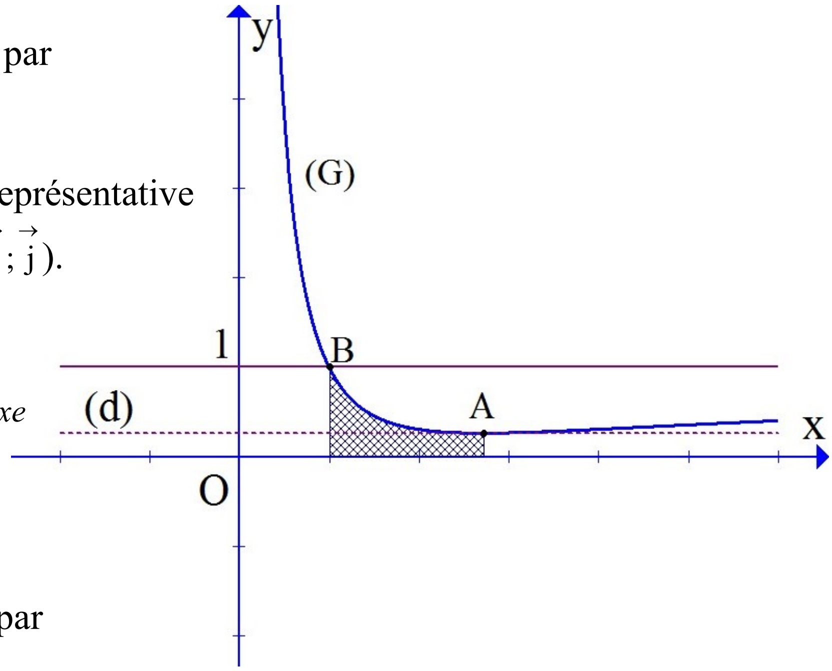
b- Calculer l'aire A du domaine limité par (C), (C') et les deux droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$. (*Donner une valeur approchée de* A à $10^{-2}$ *près*).

**6. *Partie* A**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x)=\frac{x-2\ln x}{x}.$$

La courbe (G) ci-contre est la courbe représentative de $g$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.




*Indications :*
*La droite d'équation $y = 1$ coupe (G) en B.*
*La tangente (d) à (G) en A est parallèle à l'axe des abscisses*

Calculer l'aire du domaine hachuré.

***Partie* B**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$f(x)=x-\ln^2(x)$

On désigne par (T) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1) a - Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2(x)}{x}$.

b - Montrer que (T) admet une asymptote et une direction asymptotique que l'on déterminera.

c - Dresser le tableau de variations de f.

2) Déterminer une équation de la tangente (d) à (T) au point de (T) d'abscisse 1, et étudier la position de (T) et (d).

3) Trouver les coordonnées du point d'inflexion I de (T).

4) Tracer (d) et (T).

5) a- Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$.
Indiquer le domine de définition de $f^{-1}$.

b- Calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$

c- Tracer la courbe (T') de $f^{-1}$ dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

6) a- Soit K le point de (T) d'abscisse e et L le point de (T') d'abscisse $(e-1)$.
Montrer que $KL=\sqrt{2}$ .

b- La courbe (F) ci-contre est la courbe représentative d'une primitive U de la fonction u définie pour $x > 0$ par $u(x) = \ln^2(x)$ dans un repère orthonormé.
Calculer l'aire de la surface limitée par (T), (T') et le segment [KL].