Problemas sobre enunciados para resolver con ecuaciones y sistemas

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	Repaso 4ºESO	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Calcula las medidas de un rectángulo cuya superficie es de 240 metros cuadrados, sabiendo que el largo es 6 metros mayor que el triple del ancho.

Incógnitas del problema: $base = b, altura = a$

Interpretamos a lenguaje matemático las condiciones del enunciado.

Superficie = base · altura $\rightarrow 240m^2 = b \cdot a$

El largo (base) es 6 metros mayor que el triple del ancho (altura) $\rightarrow b = 6 + 3a$

Hemos planteado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 240 = b \cdot a \\ b = 6 + 3a \end{cases}$$

Sustituimos el valor de a de la segunda ecuación en la primera.

$$240 = a(6 + 3a) \rightarrow 3a^2 + 6a - 240 = 0$$

Simplificamos los coeficientes, dividiendo todo por 3.

$$a^2 + 2a - 80 = 0$$

Obtenemos una ecuación de segundo grado, siendo $a$la incógnita, que podemos resolver con la expresión general.

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-80)}}{2 \cdot 1}$$

$$a_1 = 8$$

$$a_2 = -10$$

Por las condiciones del contexto del enunciado, solo tomamos como solución válida la solución positiva. Porque las incógnitas son dimensiones, y una longitud siempre es positiva. Por lo tanto tomamos como solución válida para nuestro problema: $a_1 = 8\, metros$.

Sustituimos.

$$b = 6 + 3a$$

$$b = 30\, metros$$

PROBLEMA 2

Calcula las dimensiones de un solar rectangular de superficie 1.200 m² y de diagonal 50 m.

Incógnitas: $base = x\ , altura = y$

$Superficie = base \cdot altura \rightarrow 1200m^2 = x \cdot y$

Aplicando el teorema de Pitágoras en la diagonal del rectángulo:

$$x^2 + y^2 = 50^2$$

Generamos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{cases} x = \dfrac{1200}{y} \\ x^2 + y^2 = 50^2 \end{cases}$$

Sustituimos el valor de x de la primera ecuación en la segunda:

$$y^4 - 2500y^2 + 1440000 = 0$$

Tenemos una ecuación bicuadrática que resolvemos con el cambio de variable $t = y^2$.

$$t^2 - 2500t + 1440000 = 0$$
$$t_1 = 1600$$
$$t_2 = 900$$

No debemos olvidar invertir el cambio de variable realizado inicialmente, con objeto de obtener los valores de la incógnita y de partida.

$$y = \pm\sqrt{1600} \rightarrow y_1 = 40,\ y_2 = -40$$
$$y = \pm\sqrt{900} \rightarrow y_3 = 30,\ y_4 = -30$$

Nos quedamos con los valores positivos, ya que físicamente tienen sentido distancias positivas. Para cada valor de y debemos calcular el correspondiente valor de x que satisface el sistema.

$$Si\ y = 40\ m \rightarrow x = 30\ m$$
$$Si\ y = 30\ m \rightarrow x = 40\ m$$

PROBLEMA 3

En una división el dividendo es 1275; el cociente y el resto son iguales, y el divisor es el doble del cociente. ¿Cuál es el divisor?

La x representa el resto de la división, que es igual a cociente según el enunciado:

$$\text{Resto} = \text{Cociente} = x$$

Al ser el divisor el doble del cociente, tenemos → Divisor = $2x$

Aplicando la prueba de la división → $cociente \times divisor + resto = dividendo$

$$x \cdot 2x + x = 1275$$

$$2x^2 + x - 1275 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1275)}}{4} = \frac{-1 \pm 101}{4}$$

$$x_1 = -25{,}25$$

$$x_2 = 25$$

La solución $-25{,}25$ se descarta porque no tiene sentido un resto negativo. El resto es siempre lo que sobra al hacer una división. Y una división significa hacer grupos del mismo tamaño. Por lo que no podemos tener restos negativos.

Por lo tanto, $x = 25$ es el valor correcto del cociente, que multiplicado por 2 da un valor de 50 para el divisor.

PROBLEMA 4

El número 365 es el número de días que tiene un año y es un número curioso: es suma de los cuadrados de 3 números naturales consecutivos. Calcúlalos.

La incógnita x es uno de esos tres números, en este caso el más pequeño. Al ser consecutivos, sumándole 1 y 2 hallamos los dos siguientes números naturales y así podemos plantear la ecuación, sabiendo que los tres números están elevados al cuadrado.

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 365 \rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 365 \rightarrow 3x^2 + 6x - 360 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot (-360)}}{6} = \frac{-6 \pm 66}{6}$$

$$x_1 = -12$$

$$x_2 = 10$$

Al indicarse que los números son naturales la solución negativa no es posible, así que obtenemos:

$$x = 10$$
$$x + 1 = 11$$
$$x + 2 = 12$$

PROBLEMA 5

En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 2 cm más que el otro y 2 cm menos que la hipotenusa. Calcula las longitudes de los lados.

De la primera ecuación, El teorema de Pitágoras afirma que, en todo triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

hipotenusa = a

cateto mayor = $a – 2$

cateto menor = $a - 4$

$a^2 = (a-4)^2 + (a-2)^2$

Nos encontramos con binomios de Newton de orden dos .

$$a^2 = (a^2 + 16 - 2 \cdot a \cdot 4) + (a^2 + 4 - 2 \cdot a \cdot 2)$$
$$a^2 = a^2 + 16 - 8a + a^2 + 4 - 4a$$
$$a^2 - 2a^2 + 12a - 20 = 0$$
$$-a^2 + 12a - 20 = 0$$

Usamos la fórmula de las ecuaciones de segundo grado.

$$a = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 + ((-4) \cdot (-20) \cdot (-1))}}{2 \cdot (-1)} \rightarrow a = \frac{-12 \pm 8}{-2} \rightarrow a = 2,\ a = 10$$

Por lo tanto la hipotenusa es $a = 10\ cm$, porque si usáramos el valor 2 nos saldrían los catetos con valores negativos.

Si despejamos los catetos: $8\ cm$ y $6\ cm$.

PROBLEMA 6

Encontrar un número que sumado con el doble de su raíz cuadrada dé 24.

Un número x que sumado con el doble de su raíz debe ser igual a 24, da lugar a la siguiente ecuación:

$$x + 2 \cdot \sqrt{x} = 24$$

$$2 \cdot \sqrt{x} = 24 - x$$

Elevamos al cuadrado en ambos miembros.

$$(2 \cdot \sqrt{x})^2 = (24 - x)^2$$

$$4 \cdot x = 575 + x^2 - 48x$$

$$0 = x^2 - 52x + 576$$

$$x = \frac{52 \pm \sqrt{52^2 - 4 \cdot 576}}{2}$$

$$x = \frac{52 \pm 20}{2}$$

$$x_1 = 16$$

$$x_2 = 36$$

Si sustituimos estos dos valores en la primera fórmula comprobamos que $x = 36$ no cumple la ecuación de partida, mientras que $x = 16$ sí la cumple. Recuerda que siempre debemos comprobar soluciones si, duranyte el proceso de resolución, hemos elevado al cuadrado.

Si $x = 16 \rightarrow 16 + 2 \cdot \sqrt{16} = 24 \rightarrow 16 + 2 \cdot 4 = 24 \rightarrow 24 = 24 \rightarrow Sí\ es\ solución$

Si $x = 36 \rightarrow 36 + 2 \cdot \sqrt{36} = 24 \rightarrow 36 + 2 \cdot 6 = 24 \rightarrow 48 = 24 \rightarrow Absurdo\ matemático \rightarrow No\ es\ solución$

Por tanto podemos afirmar que $x = 16$ es la solución a nuestro problema.

PROBLEMA 7

Los gastos diarios de tres estudiantes, Marta, Raúl y Pedro suman 51.5 euros. Si a los que gasta Marta se le suma el triple de la diferencia entre los gastos de Raúl y Pedro, obtenemos lo que gasta Pedro. Ocho veces la diferencia entre el gasto de Raúl y el de Marta es igual al gasto de Marta. ¿Cuánto gasta cada uno?

El enunciado del problema permite plantear un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas:

x → gastos de Marta

y → gastos de Raúl

z → gastos de Pedro

$$\left\{\begin{matrix} x+y+z=51{,}5 \\ x+3(y-z)=z \\ 8(y-x)=x \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x+y+z=51{,}5 \\ x+3y-4z=0 \\ -9x+8y=0 \end{matrix}\right\}$$

Aplicamos las siguientes transformaciones:

$$F'_2 = F_2 - F_1$$

$$F'_3 = F_3 + 9 \cdot F_1$$

$$\left\{\begin{matrix} x+y+z=51{,}5 \\ 0x+2y-5z=-51{,}5 \\ 0x+17y+9z=463{,}5 \end{matrix}\right\}$$

$$F'_3 = 2 \cdot F_3 - 17 \cdot F_2$$

$$\left\{\begin{matrix} x+y+z=51{,}5 \\ 0x+2y-5z=-51{,}5 \\ 0x+0y+103z=1.802{,}5 \end{matrix}\right\}$$

Soluciones:

$$103z = 1.802{,}5 \rightarrow z = 17{,}5\ € \rightarrow y = 18\ € \rightarrow x = 16\ €$$

PROBLEMA 8

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón. El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora. ¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

$x \rightarrow$ número de botellas

$y \rightarrow$ número de garrafas

$z \rightarrow$ número de bidones

$50x + 100y + 1.000z = 10.000 \rightarrow$ expresamos las masas en gramos

$x = 2y \rightarrow$ doble de botellas que de garrafas

$x + y + z = 52 \rightarrow$ 52 productos totales por hora

Si llevamos la relación $x = 2y$ a las otras dos ecuaciones, nos queda un sistema 2x2:

$$\begin{cases} 100y + 100y + 1.000z = 10.000 \\ 2y + y + z = 52 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 200y + 1.000z = 10.000 \\ 3y + z = 52 \end{cases}$$

De la segunda ecuación del sistema obtenemos la relación: $z = 52 - 3y$. Llevamos esta relación a la primera ecuación del sistema.

$$200y + 1.000 \cdot (52 - 3y) = 10.000 \rightarrow 200y + 52.000 - 3.000y = 10.000$$

$$42.000 = 2.800y$$

$$y = 15\ garrafas$$

Por lo tanto:

$$x = 2y \rightarrow x = 30\ botellas$$

$$z = 52 - 3y \rightarrow z = 7\ bidones$$