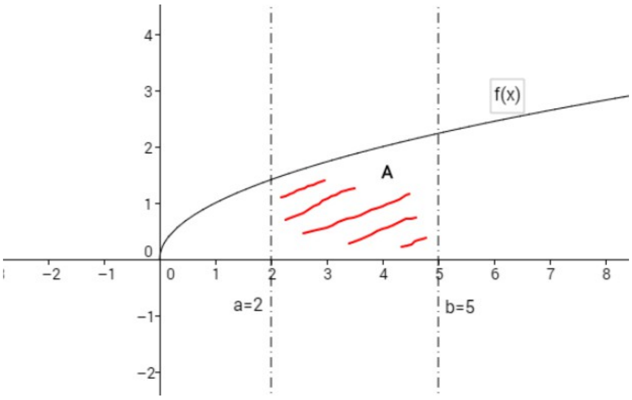
Teoría – Tema 2

CCSS Teoría - 10 - introducción a la integral definida

El problema del cálculo del área

El cálculo integral tuvo su origen en la resolución a la pregunta sobre el **área de una superficie limitada por curvas**. Cuando el recinto acotado es un polígono de lados rectos, usamos fórmulas bien conocidas: Pero cuando tenemos funciones de trazo curvo, el asunto se complica.

$$La \quad función \quad f(x) \quad encierra \quad un \quad área \quad A \quad con \quad eje \quad OX \quad y \quad rectas \quad verticales \quad x=2, \quad x=5$$



Si $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a,b]$, **la integral** $\int_a^b f(x)dx$ **recibe el nombre el área encerrada por la curva de** $f(x)$ **con el eje** OX **entre los límites de integración** $x=a$ **y** $x=b$.

$$Área=\int_a^b f(x)dx$$

Si $f(x)$ es negativa en el intervalo $[a,b]$, **el valor absoluto de la integral** $|\int_a^b f(x)dx|$ **coincide con el área encerrada por la curva de** $f(x)$ **con el eje** OX **entre los límites de integración** $x=a$ **y** $x=b$.

$$Área=-\int_a^b f(x)dx=|\int_a^b f(x)dx|$$

La expresión $\int_a^b f(x)dx$ se denomina **integral definida** de $f(x)$ en $[a,b]$.

Propiedades de la integral definida

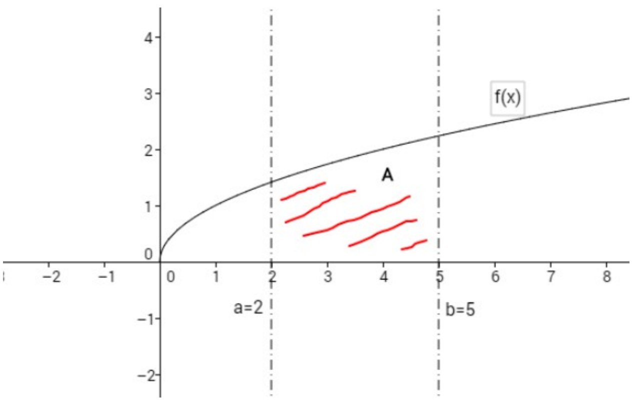
Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $c \in [a,b]$. La integral definida con límite inferior a y límite superior b cumple:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Es decir: si c está entre los límites a y b podemos romper la integral definida como suma de dos integrales.

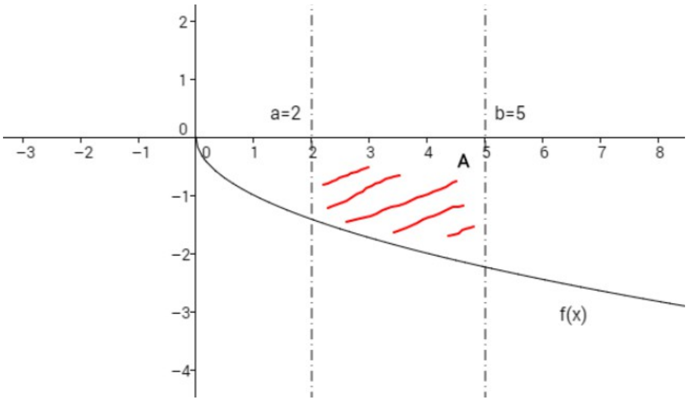
Si $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a,b]$, **la integral definida** $\int_a^b f(x)dx$ **coincide con el área encerrada por la curva de** $f(x)$ **con el eje** OX **entre los límites de integración** $x=a$ **y** $x=b$.

$$\int_a^b f(x)dx \ \ coincide \ \ con \ \ área \ \ encerrada \ \ por \ \ f(x), \ \ eje \ \ OX \ \ y \ \ límites \ \ de \ \ integración$$



¡Ojo! Para poder aplicar esta propiedad es fundamental que **la función esté por encima del eje de abscisas**. Si está por debajo debemos aplicar el valor absoluto para obtener un valor positivo del área. Si $f(x)$ es negativa en el intervalo $[a,b]$, **el valor absoluto de la integral definida** $|\int_a^b f(x)dx|$ **coincide con el área encerrada por la curva de** $f(x)$ **con el eje** OX **entre los límites de integración** $x=a$ **y** $x=b$.

$|\int_a^b f(x)dx|$ *coincide con área encerrada por* $f(x)$, *eje OX y límites de integración*



Si la función corta al eje horizontal en el intervalo $[a,b]$, deberemos calcular los puntos de corte y aplicar los dos casos anteriores (función positiva o función negativo) según corresponda en los diversos intervalos formados dentro de $[a,b]$.

Si los extremos del intervalo $[a,b]$ coinciden → $a=b$ → el área de la región considerada es cero:

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

Si cambiamos el orden de los límites de integración, la integral definida cambia de signo:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

La integral definida de la suma de funciones $f(x)$ y $g(x)$ es la suma de las integrales definidas:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

La integral definida del producto de $k\in\mathbb{R}$ por la función $f(x)$ es igual al producto de $k\in\mathbb{R}$ por la integral definida de $f(x)$:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones positivas en el intervalo $[a,b]$, tales que $f(x) \geq g(x), \forall\, x \in [a,b]$ (es decir, la gráfica de $f(x)$ siempre permanece por encima de la gráfica de $g(x)$), se cumple:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Es decir, el área encerrada por $f(x)$ sobre el eje OX es mayor que el área encerrada por $g(x)$ sobre el eje OX.

Regla de Barrow para el cálculo de integrales definidas.

Con la definición formal de integral ocurre lo mismo que con la definición formal de derivada o la definición formal de límite. **Cuando las funciones se complican, las definiciones formales son difíciles de operar.**

Por eso buscamos **métodos más prácticos**. Para ello vamos a estudiar **la regla de Barrow**, que es una consecuencia (corolario) del Teorema Fundamental del cálculo integral (y que demostraremos más adelante en el tema).

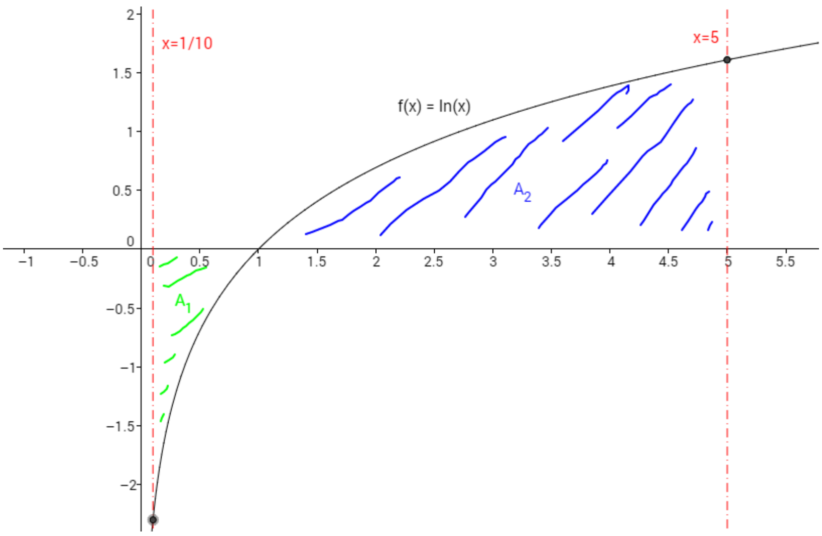
Regla o Corolario de Barrow

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$.

Entonces se cumple: $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

Ejemplo 1 resuelto

Obtener el área encerrada por $f(x)=\ln(x)$ **con el eje de abscisas en el intervalo** $[\frac{1}{10},5]$ **.**



Al representar gráficamente la curva, vemos que parte de la curva está por debajo del eje de abscisas y parte por encima. Y el corte con el eje OX se produce en $x=1$.

El área total A buscada será (según notación de la gráfica superior):

$$A=A_1+A_2$$

$$A_1\equiv \text{ Área desde } x=\frac{1}{10} \text{ hasta } x=1 \rightarrow A_1=-\int_{\frac{1}{10}}^{1} \ln(x)dx$$

$$A_2 \equiv \text{Área desde } x=1 \text{ hasta } x=5 \rightarrow A_2=\int_1^5 \ln(x)\,dx$$

Por lo tanto, debemos obtener una primitiva de $f(x)=\ln(x)$ y aplicar la regla de Barrow en cada tramo de área definida.

$$\int \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x)-x+C$$

Donde hemos aplicado el método de integración por partes.

Al sustituir en la integral definida no es necesario que usemos la constante C, ya que ésta cancela al aplicar la regla de Barrow:

Si $F(x)=\int f(x)\,dx \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$

$$A_1=-\int_{\frac{1}{10}}^{1} \ln(x)\,dx=-[x\cdot\ln(x)-x]_{\frac{1}{10}}^{1}=-[(1\cdot\ln(1)-1)-(\frac{1}{10}\cdot\ln(\frac{1}{10})-\frac{1}{10})]$$

$$A_2=\int_1^5 \ln(x)\,dx=[x\cdot\ln(x)-x]_1^5=[(5\cdot\ln(5)-5)-(1\cdot\ln(1)-1)]$$

Operamos (recuerda que el logaritmo de un cociente es la diferencia del logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador).

$$A_1=-[(0-1)-(\frac{-1}{10}\cdot\ln(10)-\frac{1}{10})]=1-\frac{1}{10}\cdot\ln(10)-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\cdot\ln(10)$$

$$A_2=[(5\cdot\ln(5)-5)+1]=5\cdot\ln(5)-4$$

Por lo tanto: $A=A_1+A_2$

$$A=\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\cdot\ln(10)+5\cdot\ln(5)-4=\frac{-31}{10}-\frac{1}{10}\cdot\ln(10)+5\cdot\ln(5) \rightarrow A\simeq 4{,}72 \;\; u^2$$