Hoja Trabajo 4.

① geogebra.

② Analisis PVI

a) Geogebra.

Analisis desde la vista gráfica:

14. $\frac{dy}{dx} = y^{1/3} \quad y(0) = 0$

Hay una solución única alrededor de $x=0$

15. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y} \quad y(2) = 2$.

si hay solución alrededor de $x=2$ y se puede identificar el dominio de la solucion está acortado.

16. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x-y} \quad y(2) = 1$

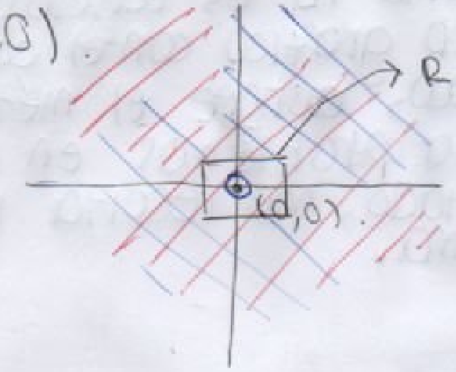
se puede ver una solución única alrededor del $x=2$.

b) Analisis usando el teorema.

14° $f(x,y) = y^{1/3}$ *Dom: $(x,y) \in R^2$:

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3y^{2/3}}$ *Dom: $(x,y) \in R^2 : y \neq 0$.

P(0,0).

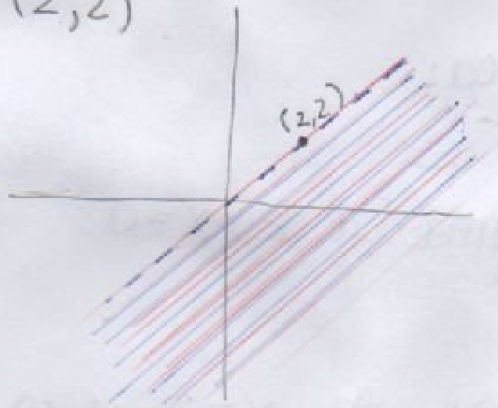


• teniendo en cuenta el teorema, existe solución dado que f es continua en la región "R" que contiene al punto; pero no se garantiza unicidad porque f_y no es continua en dicha región.

15. $f(x,y) = \sqrt{x-y} \longrightarrow$ *Dom $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y$.

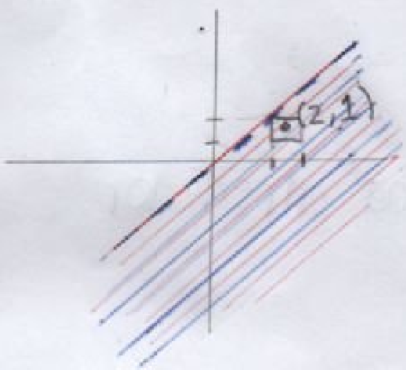
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}} \longrightarrow$ *Dom $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y$

P(2,2)



- Para este caso el teorema no es concluyente, es decir no garantiza ni existencia ni unicidad. Dado que no se puede determinar una region R que contenga al punto (2,2) donde f sea continua, y f_y no es continua en dicho punto.

16. P(2,1).



- En este caso el teorema garantiza existencia y unicidad, dado que existe una región R que contiene al punto (2,1) en donde f es continua y en donde f_y también es continua.

c. Ambos métodos resultan me resultan bastante útiles y de cierto modo considero que se complementan. Por ejemplo, en el caso de las soluciones triviales, para las que el teorema no es concluyente, resulta más diciente el método gráfico con el campo de direcciones. Por otro lado, aunque el método grafico brinde información para problemas en los que el teorema se ve limitado, me resulta más cómodo hacer uso del teorema.

③ considere $xy' = 2y$

$y' = \frac{2y}{x}$ ← EDO separable

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

$\frac{1}{2y}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$

(integrar ambos lados)

$\frac{1}{2}\ln y = \ln x + C$

$\ln y = 2\ln x + C$

$e^{\ln y} = e^{2\ln x + C}$

(propiedad de e)

$y = x^2 \cdot e^c \longrightarrow e^c = C$

$\boxed{y = Cx^2}$

función solución EDO:

$y' = 2Cx \cdot y = Cx^2$

$2Cx = \frac{2Cx^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}$ ✓

a) GeoGebra.

b) si $x \le 0$ entonces $y = x^2$

$y = x^2$
$y' = 2x$.

$y' = \frac{2y}{x}$.
(reemplazamos)

$2x = \frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}$

$\boxed{2x = 2x}$

si $x > 0$ entonces $y = Cx^2$.

$y = Cx^2$
$y' = 2Cx$

$y' = \frac{2y}{x}$
(reemplazamos)

$2Cx = \frac{2Cx^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}$

$\boxed{2Cx = 2Cx}$

c) $\underbrace{y' = \frac{2y}{x} \quad y(0) = 0}_{\text{PVI}}$

$f(x,y) = \frac{2y}{x}$ Dom $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2}{x}$ Dom $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0$.

El teorema no garantiza existencia ni unicidad. Sin embargo en GeoGebra se observa que existen infinitas soluciones que pasan por (0,0).

• A pesar que gráficamente vemos que hay infinitas soluciones que pasan por (-1,1) toda estas soluciones son iguales en el intervalo (-2,0); que es justo lo que garantiza el teorema.

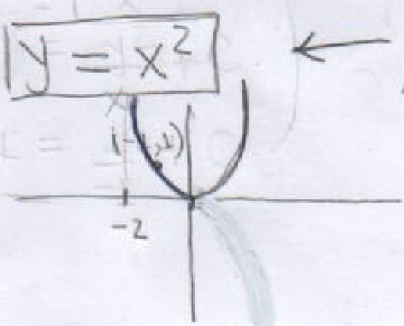
$y' = \frac{2y}{x}$ $y(-1) = 1$ ← PVI

$f(x,y) = \frac{2y}{x}$ Dom $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2}{x}$ Dom $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0$.

• El teorema garantiza existencia y unicidad al rededor de $x = 1$.

$\boxed{y = x^2}$ ← $\boxed{x \le 0}$



④ considere $y' + 2xy^2 = 0$.

a)

$$y' = -2xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2$$

$$y^{-2}\,dy = -2x\,dx$$

(integrar)

$$-\frac{1}{y} = -x^2 + C$$

$$-y = -\frac{1}{x^2+C}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x^2+C}} \longrightarrow \boxed{\text{familia solución}}$$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+C)^2}$$

(reemplazando).

$$\frac{-2x}{(x^2+C)^2} = -2x \cdot \left(\frac{1}{x^2+C}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{-2x}{(x^2+c)^2} = \frac{-2x}{(x^2+c)^2}} \checkmark$$

b) i) $y(0) = 1$

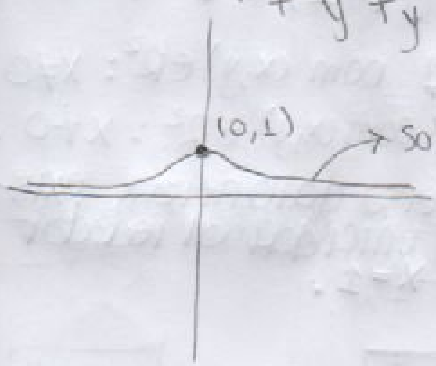
$f(x,y) = -2xy^2 \longrightarrow$ Dom $(x,y) \in R^2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -4xy \longrightarrow$ Dom $(x,y) \in R^2$

El teorema garantiza existencia y unicidad.

$P(0,1)$

- f es continua en una región R que contiene al punto
- f y f_y son continuas en R.



PVI $f(0) = 1$

(utilizo familia solución encontrada en el literal anterior)

$$y = \frac{1}{x^2+C}$$

$$1 = \frac{1}{0+C}$$

$$1 = \frac{1}{C}$$

(multiplico C ambos lados)

$$C = 1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x^2+1}}$$

ii) $y(1) = \frac{1}{2}$. $\left.\begin{array}{l} f(x,y) = -2xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -4yx \end{array}\right\}$ Dom $(x,y) \in R^2$.

El teorema garantiza existencia y unicidad

- $f(x,y) = -2xy^2$. es continua en una región R que contiene al punto.
- $f(x,y)$ y f_y son continuas en R.

PVI $f(1) = \frac{1}{2}$.

(usando familia solución)

$$y = \frac{1}{x^2+C}$$

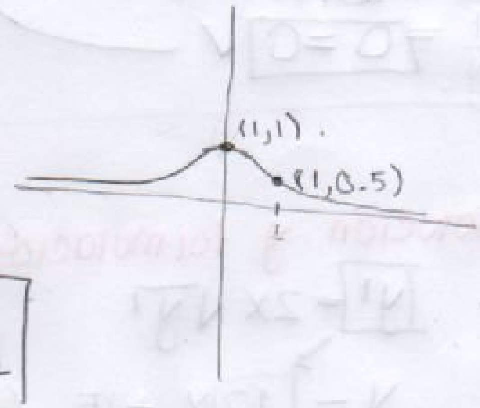
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+C}$$

$$1 = \frac{2}{1+C}$$

$$C+1 = 2$$

$$C = 1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x^2+1}}$$



iii) $y(0) = -1$ $\quad y' = -2xy^2 \longrightarrow f(x,y)$ Dom $(x,y) \in R^2$.
$\partial f/\partial y = -4xy$ Dom$(x,y) \in R^2$.

El teorema garantiza existencia y unicidad.

PVI $f(0) = -1$

$$y = \frac{1}{x^2+C}$$

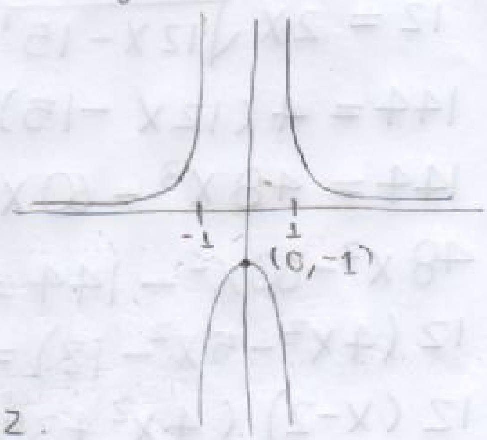
$$-1 = \frac{1}{C}$$

(multiplico C ambos lados)

$$-C = 1$$

$$C = -1$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x^2-1}}$$



iv) $f(x,y) = -2xy^2$ Dom $(x,y) \in R^2$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = -4xy$ Dom $(x,y) \in R^2$.

$y(0) = 0$.

usando la familia solución $y = \frac{1}{x^2+C}$.

$$0 = \frac{1}{0^2+C} = 0 = \frac{1}{C}$$ (indeterminación)

iv) Por lo tanto, no es parte de la familia paramétrica de soluciones

$y' = -2xy^2 \cdot y(0) = 0$.

$y' = -2(0)\cdot(0)^2$.

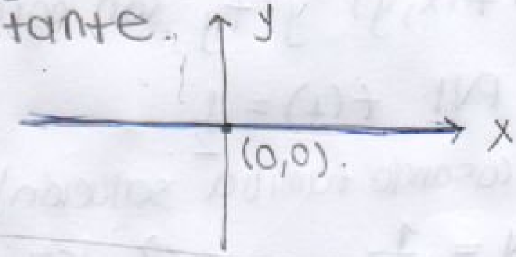
$y' = 0 \longrightarrow$ la pendiente de la recta tangente en $(0,0)$ es 0.

$y'(x) = \quad y(x) = 0$. entonces:

$y' + 2xy^2 = 0$.

$0 + 2x(0) = 0$

$\boxed{0 = 0}$ ✓ → existe una función solución constante.



Resolución y formulación de problemas.

1. $\boxed{y'} = 2x\sqrt{y}$

$y = \boxed{12}x - 15$ (tangente a la gráfica de la función)

→ pendiente de recta tangente : y'

$$\boxed{12 = 2x\sqrt{y}}$$

$$12 = 2x\sqrt{12x-15}$$

$$144 = 4(12x-15)x^2$$

$$144 = 48x^3 - 60x^2$$

$$48x^3 - 60x^2 - 144 = 0.$$

$$12(4x^3 - 5x^2 - 12) = 0$$

$$12\underbrace{(x-2)}(4x^2+3x+6) = 0$$

$\boxed{x=2} \longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} y(2) = 12(2) - 15 \\ y(2) = 9 \\ P(2,9). \end{array}}$

$y = 12(2) - 15$

$y = 24 - 15.$

$y = 9$

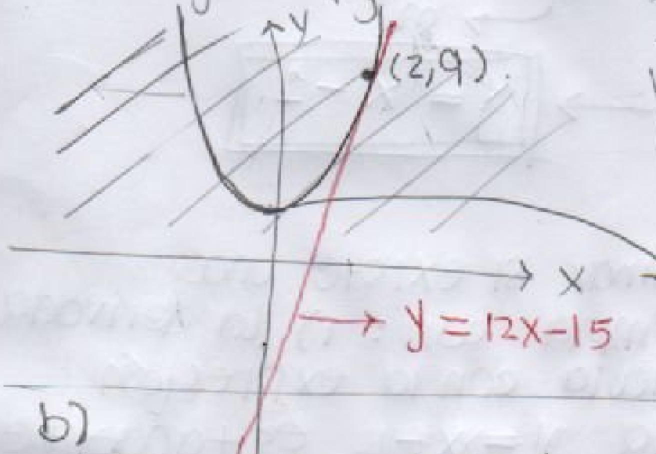
a) El analisis a priorí del problema sobre existencia y unicidad se puede hacer ya que contamos con $f(x,y)$. y el punto $P(2,9)$

$$y' = \boxed{2x\sqrt{y}} \rightarrow f(x,y) \qquad P(2,9)$$

Dom. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{y}}$$

Dom $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0$.



· El teorema garantiza existencia y unicidad en los cuadrantes 1 y 2, siempre y cuando $y > 0$, por lo tanto existe una región R. que contiene al punto (2,9) y en donde f y f_y son continuas.

$$\boxed{y = \frac{1}{4}(x^4 + 4x^2 + 4)}$$

b)

Utilizando método de EDO separables

$$\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = 2x\,dx.$$

$$2\sqrt{y} = x^2 + C.$$

$$\sqrt{y} = \frac{x^2+C}{2}$$

$$y = \left(\frac{x^2+C}{2}\right)^2$$

$$y = \frac{(x^2+C)^2}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}(x^4 + 2x^2C + C^2)$$

$$\boxed{y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2C}{2} + \frac{C^2}{4}}$$ familia paramétrica.

(teniendo en cuenta $P(2,9)$)

$$9 = \frac{1}{4}\cdot(2^4 + 2(2)^2C + C^2).$$

$$36 = 16 + 8C + C^2$$

$$36 = C^2 + 2C(4) + 4^2.$$

$$36 = (C+4)^2$$

$$6 = C + 4.$$

$$C = 6 - 4$$

$$\boxed{C = 2}$$

por tanto;

$$\underbrace{\boxed{y = \frac{1}{4}(x^4 + 4x^2 + 4).}}_{\text{En el punto } (2,9)}$$

PVI

$y' = \sqrt{x-y}$, $y(2) = 1$

a) La pendiente de la solución en $(2,1)$ es:

$y' = \sqrt{2-1} = 1 \longrightarrow$ La pendiente de la recta tangente en $(2,1)$.

Por tanto; La recta es $y = 1x + b$.
$1 \rightarrow m$.

$P(2,1)$ reemplazando

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 1(2) + b. \\ 1 = 2 + b \longrightarrow b = -1 \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{y = x - 1}$$

*Problema reescrito: determinar si existe una función $y = y(x)$ que cumpla con: i) La derivada en todo punto (x,y) se calcula con la expresión $y' = \sqrt{x-y}$ ii) La recta $y = x - 1$. es tangente a la gráfica de la función.

b) Recurso algebraico: cambio de variable.

$y' = \sqrt{x-y}$ $\qquad u = x - y$.

$y' = \sqrt{u}$ $\qquad \dfrac{du}{dx} = 1 - \dfrac{dy}{dx} \longrightarrow \boxed{\dfrac{dy}{dx} = 1 - \dfrac{du}{dx}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{u}$

$1 - \dfrac{du}{dx} = \sqrt{u}$ $\qquad \displaystyle\int \frac{1}{1-\sqrt{u}}\, du \ldots$

$\dfrac{du}{dx} = 1 - \sqrt{u}$ $\qquad \displaystyle\ldots = -\int \frac{1}{\sqrt{u}-1}\, du$

$$\boxed{\begin{array}{l} v = \sqrt{u} \\ \dfrac{dv}{du} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \\ du = 2\sqrt{u}\, dv. \end{array}}$$

$\dfrac{1}{1-\sqrt{u}}\, du = dx$. $\qquad \displaystyle -2\int \frac{v}{v-1}\, dv$

(integro) $\qquad \displaystyle -2\int \frac{1}{v-1} + 1\, dv$

$$-2\left[\int \frac{1}{v-1}\, dv + \int 1\, dv\right] \ldots$$

...

$$-2\left[\int \frac{1}{v-1}\,dv + \int 1\,dv\right]$$

sustituir:

$$w = v-1$$
$$\frac{dw}{dv} = 1 \quad dw = dv$$

$$\int \frac{1}{w}\,dw = \ln(w)$$

$$\ln(w) = \ln|v-1|$$

Reemplazando la integral resuelta tenemos:

$$-2\left[\ln|v-1| + v\right]$$

sabiendo que $v = \sqrt{u}$

$$-2\left[\ln|\sqrt{u}-1| + \sqrt{u}\right]$$

sabiendo que $u = x-y$.

$$-2\left[\ln|\sqrt{x-y}-1| + \sqrt{x-y}\right]$$

Por tanto;

$$\underbrace{\int \frac{1}{1-\sqrt{u}}\,du} = \int dx.$$

$$-2\left(\ln|\sqrt{x-y}-1| + \sqrt{x-y}\right] = x + c.$$

* hice un deslizador c en GeoGebra y escribí esa curva implícita en GeoGebra, efectivamente es una familia paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' = \sqrt{x-y}$