Simulazione II Prova scritta del 02/04/2019: Licei Scientifici (Soluzione dei Quesiti)

Prof. G. Forte*

a. a. 2018/2019

1 Quesiti

Quesito 1.1. *Assegnato $k \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione coì definita :*

$$g(x) = \frac{(k-1)x^3 + kx^2 - 3}{x-1}$$

(a) Come si deve scegliere il parametro k affinché la funzione g non abbia asintoti?

(b) Come va scelto il valore di k affinché g abbia un asintoto obliquo? Giustificare le risposte e rappresentare, in entrambi i casi, i grafici delle funzioni ottenute.

Soluzione

(a) Per evitare di ottenere un asintoto verticale in $x = 1$, possiamo richiedere che il polinomio $P(x) = (k-1)x^3 + kx^2 - 3$ sia fattorizzabile per $x - 1$, ovvero deve essere

$$P(x) = (k-1)x^3+kx^2-3 = (x-1)\Big[(k-1)x^2+bx+c\Big] = (k-1)x^3+(b-k+1)x^2+(c-b)x-c$$

da cui si vede subito che deve essere $b = c = 3$, e $k = 2$. Per tali valori dei parametri risulta

$$g(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

che rappresenta una parabola con il minimo assoluto in $V\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$ (v. Fig. 1a).

*gforte@outlook.it

(b) Per avere un asintoto obliquo (nè orizzontale, nè verticale) devono esistere finiti i limiti

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} \\
p &= \lim_{x\to\pm\infty} [g(x) - mx]
\end{aligned}
$$

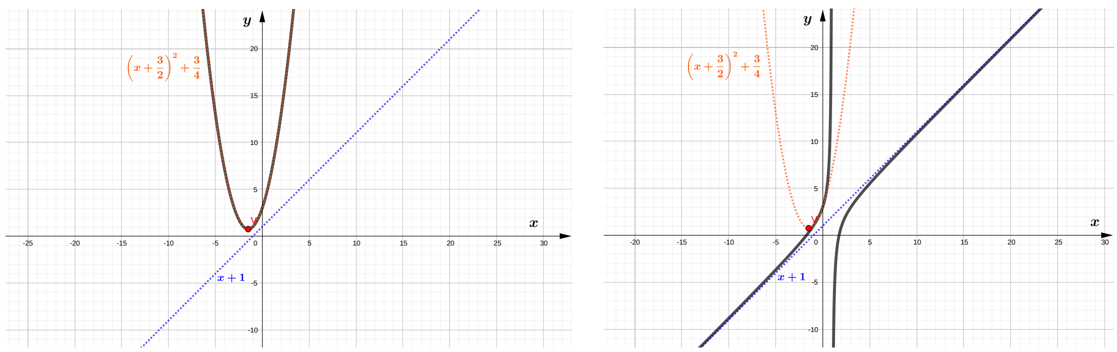
in più deve essere $m \neq 0$ (infatti nel caso $m = 0$ avremmo un asintoto orizzontale). Il primo limite può convergere solo se il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore, ovvero se $k = 1$, nel qual caso, calcolando il limite, si ottiene $m = 1$. Per quanto riguarda il secondo limite invece abbiamo

$$
\lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2-3}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x-3}{x-1}\right] = 1
$$

e dunque l'asintoto obliquo ha equazione

$$
y = x + 1
$$

Il grafico della funzione in questo secondo caso è dato in Fig. 1b



(a) (b)

Figura 1

Quesito 1.2. *Sia f una funzione derivabile e pari in $\mathbb{R}$, sia g una funzione dispari e derivabile in $\mathbb{R}$. Dimostrare che la funzione f' è dispari e che la funzione g' è pari. Fornire un esempio per la funzione g ed un esempio per per funzione f, verificando quanto sopra.*

Soluzione

Essendo f per definizione ovunque derivabile, siamo sicuri che per ogni coppia $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, esiste la funzione derivata $m_{\mathrm{f}}(x)$ e che tale funzione consente di scrivere, in un intorno infinitesimo di x (sviluppo di Taylor al prim'ordine)

$$
\begin{aligned}
f(\xi) &\approx f(x) + m_{\mathrm{f}}(x)(\xi - x) \\
f(-\xi) &\approx f(-x) - m_{\mathrm{f}}(-x)(\xi - x)
\end{aligned}
$$

dove, nella seconda equazione si è sostituita la coppia (x, ξ) con $(-x, -\xi)$. Sfruttando l'ipotesi di simmetria di f segue

$$f(\xi) = f(-\xi) \qquad \rightarrow \qquad f(x) + m_{\mathrm{f}}(x)(\xi - x) = f(-x) - m_{\mathrm{f}}(-x)(\xi - x) \qquad \rightarrow$$

da cui segue banalmente

$$\frac{m_{\mathrm{f}}(x)}{m_{\mathrm{f}}(-x)} = -1$$

Data l'arbitrarietà della coppia (x, ξ), segue la tesi $\Box$.

In realtà nella prova molto "free–style" è stata fatta qualche piccola forzatura dal punto di vista logico–formale, pur rimanendo il risultato generale valido. Sapreste individuare la forzatura e formulare il tutto in un contesto formalmente corretto[1]?

Con la funzione g si ragiona in maniera analoga, dimostrando che

$$\frac{m_{\mathrm{g}}(x)}{m_{\mathrm{g}}(-x)} = 1$$

essendo $m_{\mathrm{g}}(x)$ la derivata della funzione g nel punto generico x (left as an exercise).

Vediamo un paio di esempi.

$$f(x) = x^{2n} \qquad \rightarrow \quad m_{\mathrm{f}}(x) = 2nx^{-1}f(x)$$

$$g(x) = xf(x) \qquad \rightarrow \quad m_{\mathrm{g}}(x) = f(x) + xm_{\mathrm{f}}(x)$$

Un altro esempio è dato dalla coppia di funzioni

$$f(x) = \sin(x) \qquad \rightarrow \quad m_{\mathrm{f}}(x) = \cos(x)$$

$$g(x) = \cos(x) \qquad \rightarrow \quad m_{\mathrm{g}}(x) = -\sin(x)$$

Quesito 1.3. *Si consideri la funzione* $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ *coì definita*

$$f(x) = \int_1^x dt \; \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f *nel suo punto di ascissa* $x = 1$.

Soluzione

In un intorno infinitesimo del punto 1 possiamo scrivere, grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, che

$$f(x) \approx f(1) + g(1)(x - 1)$$

[1] Tipico lavoro da matematici puri $\cdots$

Nell'espressione precedente si è definito:

$$g(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{x} \qquad \rightarrow \qquad g(1) = \frac{1}{2}$$

Risulta inoltre che

$$f(1) = \int_1^1 dt\, \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t} = 0$$

e quindi l'equazione della retta tangente assume la semplice forma

$$y = g(1)(x-1) = \frac{1}{2}(x-1)$$

Si osservi che la semplice identificazione della derivata dell'integrale con la sua funzione integranda $g(x)$ non è più valida quando l'estremo d'integrazione x è sostituito con una generica funzione $\beta(x)$. In tal caso si deve far ricorso alla regola di integrazione di Leibnitz, alla quale però si rimanda alla letteratura. Si può ad esempio consultare Flanders [1973].

Quesito 1.4. *Nello spazio tridimensionale, sia r la retta passante per i punti $A(-2;0;1)$ e $B(0;2;1)$. Determinare le coordinate di un punto appartenente alla retta r che sia equidistante rispetto ai punti $C(5;1;-2)$ e $D(1;3;4)$.*

Soluzione

Esercizio per il lettore

Quesito 1.5. *Emma fa questo gioco: lancia un dado con facce numerate da 1 a 6; se esce il numero 3 guadagna 3 punti, altrimenti perde 1 punto. Il punteggio iniziale è 0.*

*(a) Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia "ancora" 0? (*io interpreto risolvendo per la probabilità che, al quarto lancio, il punteggio sia zero; tuttavia, "ancora" sembrerebbe suggerire la probabilità che dopo 4 lanci il punteggio sia rimasto costantemente zero; in tal caso la probabilità sarebbe nulla*)*

(b) Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0?

Soluzione

Assumiamo che le facce del dado siano, a priori, tutte equivalenti e chiamiamo δx la variabile random che assume valori

$$\delta x = \begin{cases} 3, & \text{con probabilità } P_+ = \dfrac{1}{6} \\ \\ -1, & \text{con probabilità } P_- = \dfrac{5}{6} \end{cases} \tag{1}$$

(a) In pratica vogliamo calcolare la probabilità che la variabile random $X = \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + \delta x_4$ (ovvero la somma di variabili random indipendententi estratte secondo la distribuzione di probabilità in Eq. (1)) sia nulla. Sia $P_4(X = 0)$ la probabilità che la somma di 4 lanci indipendenti dia come risultato zero. Una possibile realizzazione dell'evento è data dalla sequenza di lanci

$$\delta x_1 = 3, \delta x_2 = \delta x_3 = \delta x_4 = -1$$

La probabilità di un simile evento, trattandosi di eventi indipendenti, è data da $P_0(\delta x_1 = 3, \delta x_2 = \delta x_3 = \delta x_4 = -1) = P_-^3\ P_+$. In realtà, l'ordinamento con cui la variabile random in questione assume i valori qui sopra non importa, ciò che importa è che compaiano tre -1 ed un 3; ci sono $\binom{4}{3}$ possibili modi di ottenere un evento del genere e quindi la probabilità cercata sarà data da

$$P_4(X = 0) = \binom{4}{3} P_-^3\ P_+ = 4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{125}{324} \approx 40\%$$

Si tratta di una variabile random binomiale. Se N è il numero di lanci totale e, su questi N lanci, $k \leq N$ di essi sono del tipo $\delta x = -1$, allora la probabilità di una sequenza qualunque con k volte il valore -1 ed $N - k$ volte il valore 3 sarà data da

$$P = \binom{N}{k} P_-^k\ P_+^{N-k}$$

(b) Affinché Alice non scenda mai al di sotto dello zero e vada in debito, al primo lancio deve necessariamente uscire $\delta x_1 = 3$; nei successivi 4 lanci deve uscire *almeno* un altro $\delta x = 3$. Quello che succede al sesto lancio non ci interessa. Indichiamo con ψ la probabilità che ci interessa. Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento congiunto

$$\psi = P\Big(E_4, E_3\Big) = P(E_4|E_3)P(E_3)$$

dove

- $E_4 =$ "*esce almeno un 3 nei 4 lanci successivi al primo*"
- $E_3 =$"*esce 3 al primo lancio*"

Ovviamente sappiamo che $P(E_3) = P_+$ e che

$$P(E_4|E_3) = 1 - P(-1, -1, -1, -1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

e quindi, in definitiva abbiamo

$$\psi = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4\right) = \frac{671}{7776} \approx 10\%$$

Quesito 1.6. *Ai vertici di un quadrato $ABCD$, di lato $\ell = 2$ m, sono fissate quattro cariche elettriche. La carica in A è pari a $Q = 9$ nC, la carica in B è pari a $2Q/9$, la carica in C è pari a $4Q/9$, la carica in D è pari a $-Q/3$. Supponendo che le cariche si trovino nel vuoto, determinare intensità, direzione e verso del campo elettrostatico generato dalle quattro cariche nel centro del quadrato.*

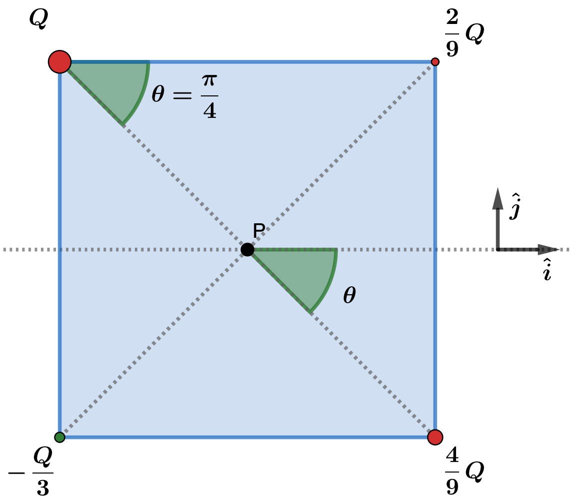


Figura 2: Sistema della 4 cariche descritto nel Quesito 1.6

Soluzione

La situazione descritta nella traccia è rappresentata in Fig. 2. Il campo totale nel punto P è dato, per il principio di sovrapposizione degli effetti, dalla somma vettoriale dei campi generati dalle singole cariche in assenza delle altre. Detto ℓ il lato del quadrato, ogni carica è distante $\ell/\sqrt{2}$ dal punto P ed i singoli contributi al campo, dovuti singolarmente alle cariche poste nei vertici del quadrato, sono dati da

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_A &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{i}} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{j}}\right] = \frac{\sqrt{2}Q}{4\pi\varepsilon_0\ell^2}\left[\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}\right] \\
\mathbf{E}_B &= \frac{\frac{2}{9}Q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{i}} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{j}}\right] = -\frac{\sqrt{2}Q}{18\pi\varepsilon_0\ell^2}\left[\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right] \\
\mathbf{E}_C &= \frac{\frac{4}{9}Q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{i}} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{j}}\right] = \frac{\sqrt{2}Q}{9\pi\varepsilon_0\ell^2}\left[-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right] \\
\mathbf{E}_D &= \frac{\frac{1}{3}Q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{i}} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{\mathbf{j}}\right] = -\frac{\sqrt{2}Q}{12\pi\varepsilon_0\ell^2}\left[\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right]
\end{aligned}$$

Dai singoli contributi scritti sopra si ricava agevolmente il campo totale $\mathbf{E}$ nel punto P come somma vettoriale dei singoli campi, ovvero

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B + \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_D = -\frac{5\sqrt{2}Q}{18\pi\varepsilon_0\ell^2}\hat{\mathbf{j}}$$

da cui si vede immediatamente la direzione e verso del campo. L'intensità è data da

$$E = \frac{5\sqrt{2}Q}{18\pi\varepsilon_0\ell^2} = \frac{10\sqrt{2}}{9} \times \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{Q}{\ell^2} =$$

$$= \frac{10\sqrt{2}}{9} \times 9.0 \times 10^9\ \frac{\mathsf{N\ m^2}}{\mathsf{C^2}} \times \frac{9.0 \times 10^{-9}\ \mathsf{C}}{4\ \mathsf{m^2}} \approx 32.0\ \frac{\mathsf{N}}{\mathsf{C}}$$

Quesito 1.7. *Un protone, inizialmente in quiete, viene accelerato da una d.d.p. di $\Delta V = 400\ \mathcal{V}$ ed entra, successivamente, in una regione che è sede di un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla sua velocità. La figura 3 illustra un tratto semicircolare della traiettoria descritta dal protone (i quadretti hanno lato $\ell = 1$ m). Determinare l'intensità di* **B** *(che ha direzione perpendicolare al piano del foglio e verso uscente).*

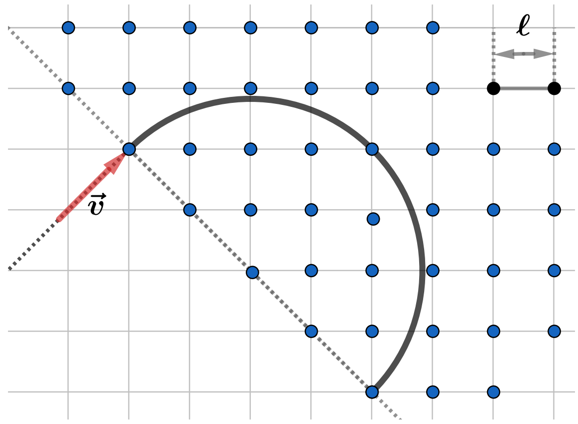


Figura 3: Esercizio 1.7, il lato di ogni quadrato vale $\ell = 1$ m

Soluzione

Considerando che l'elettrone viene accelerato da un campo elettrostatico (conservativo), l'energia meccanica totale del protone deve conservarsi. Applicando la conservazione dell'energia si calcola la velocità del protone, dopo di che si tratta di uguagliare la forza di Lorentz con la forza centripeta che mantiene il protone sulla traiettoria circolare con modulo della velocità costante. Buon divertimento :-)

(Perché il modulo della velocità non cambia? Perché se il modulo della velocità è costante la traiettoria è necessariamente circolare? Vale il viceversa, ovvero un protone su traiettoria circolare deve avere necessariamente velocià costante? Ha senso affermare che un **protone** si muove su una traiettoria esattamente circolare con velocità costante in modulo esattamente determinata? Sapreste individuare la differenza fra l'esercizio proposto qui e quello originale della simulazione d'esame?)

Quesito 1.8. *Si vuole ottenere l'emissione di elettroni da lastre metalliche di materiali diversi su cui incide una radiazione di frequenza 7.8×10^{14} Hz. Determinare, motivando la risposta, quale tra i materiali in elenco (v. Tab. 1) è l'unico adatto allo scopo.*

Tabella 1

Materiale	**Lavoro di estrazione** (eV)
Argento	4.8
Cesio	1.8
Platino	5.3

Soluzione

Si tratta di una "banale" applicazione dell'effetto fotoelettrico. Chiaramente l'esercizio è banale alla luce delle conoscenze scientifiche attuali. Tuttavia, quando Einstein formulò la teoria dell'effetto fotoelettrico non aveva una idea chiara delle acque in cui si stava muovendo, tanto è vero che Einstein elaborò la fenomenologia dell'effetto fotoelettrico aggrappandosi all'unica teoria Fisica che a tutt'ora è risultata inattaccabile: la Termodinamica (Einstein aveva capito bene che, fra tanti dubbi rispetto alle teorie classiche dell'epoca, la Termodinamica era la più affidabile)[2]. In seguito, grazie al suo contributo, fu insignito del premio Nobel per la Fisica (esatto, Einstein ha vinto il premio Nobel per l'effetto fotoelettrico, non per la Relatività). Einstein ha, durante tutta la sua vita, rifiutato l'interpretazione standard della Meccanica Quantistica ed era convinto (insieme con Popper [2005] per esempio) che dovesse esservi una struttura teorica più fondamentale (che tuttavia, se pure una tale struttura esista, fugge tutt'ora la comprensione umana). Dunque il discorso, in realtà è tutt'altro che banale. L'applicazione delle formulette in questo esercizio, invece, non presenta nessun tipo di matematica sofisticata. Per i più temerari, potete consultare l'articolo originale di Einstein [1905], oppure leggere la traduzione free–download (in inglese) al seguente indirizzo della santa pagina https://wikisource.org. L'articolo merita davvero di essere letto con molta calma. Nel caso voleste farlo, prendetevi il vostro tempo, piazzatevi l'Amaldi per i Licei scientifici accanto e "*Vai ... mio giovane Padawan*".

[2] "*La termodinamica, durante le successive rivoluzioni nella fisica del XX secolo, è rimasta stabile come una roccia, e [$\cdots$] i grandi innovatori, Planck ed Einstein, la usarono come un'ancora quando tutto sembrava dovere essere messo in dubbio*" [Segrè, 1976]

Riferimenti bibliografici

Einstein, A.

1905 "Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt", *Annalen der physik*, vol. 322, 6, p. 132-148.

Flanders, Harley

1973 "Differentiation under the integral sign", *The American Mathematical Monthly*, vol. 80, 6, p. 615-627.

Popper, Karl

2005 *The logic of scientific discovery*, (First English Edition–1959), Routledge, vol. I–II–III.

Segrè, E.

1976 *Personaggi e scoperte nella Fisica contemporanea*, A. Mondadori.