La spirale di Teodoro e
le radici quadrate non razionali di numeri naturali

Christian Ferrari

Laboratorio di Matematica

Una costruzione classica, nota come ***spirale di Teodoro*** di Cirene (matematico della scuola pitagorica, V sec. a.C.), permette di costruire geometricamente le radici quadrate dei numeri interi a partire da un triangolo rettangolo isoscele avente cateti di lunghezza unitaria.

Alla base di questa costruzione vi è il *teorema di Pitagora*. Dato un triangolo rettangolo ABC, retto in A, (vedi figura 1)

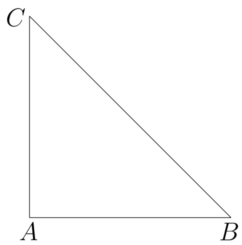

Figura 1: Triangolo rettangolo retto in A.

allora

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Longrightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}\,.$$

Consideriamo il triangolo OAB rappresentato nella figura 2 in cui $OA = AB = 1$:

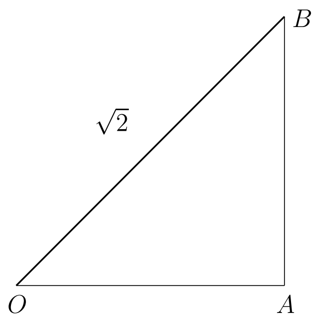

Figura 2: Costruzione di $\sqrt{2}$.

Per il teorema di Pitagora abbiamo

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} \Longrightarrow OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,.$$

Consideriamo ora la figura 3 in cui costruiamo un nuovo triangolo rettangolo, retto in B, con cateti OB e BC, di cui l'ultimo di lunghezza unitaria.

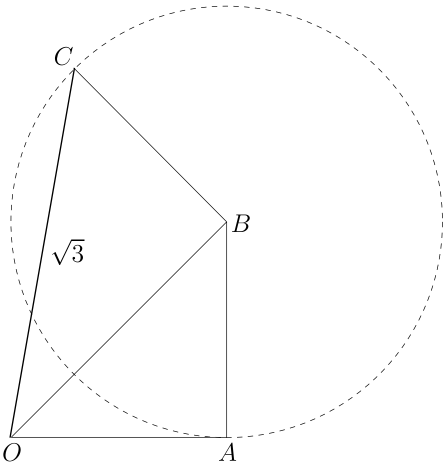

Figura 3: Costruzione di $\sqrt{3}$.

Sempre per il teorema di Pitagora abbiamo

$$OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}\,.$$

Consideriamo ora la figura 4 in cui costruiamo un nuovo triangolo rettangolo, retto in C, con cateti OC e CD, di cui l'ultimo di lunghezza unitaria.

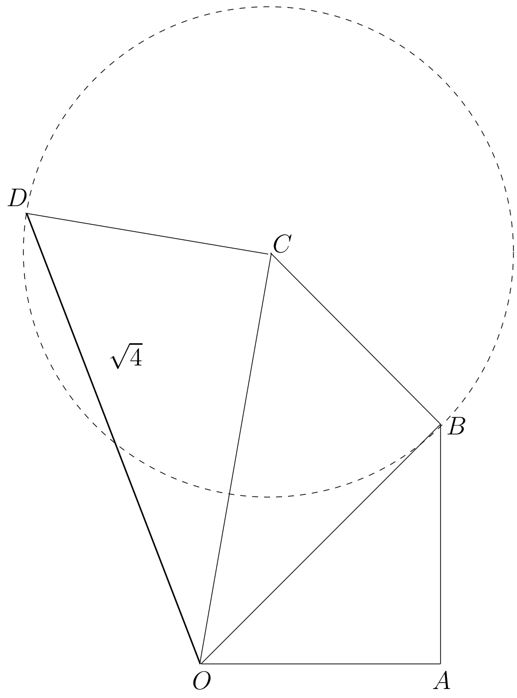

Figura 4: Costruzione di $\sqrt{4}$.

Sempre per il teorema di Pitagora abbiamo

$$OD = \sqrt{OC^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4}\,.$$

Ripetendo il procedimento si ottengono facilmente tutte le radici quadrate dei numeri naturali, vedi figura 5.

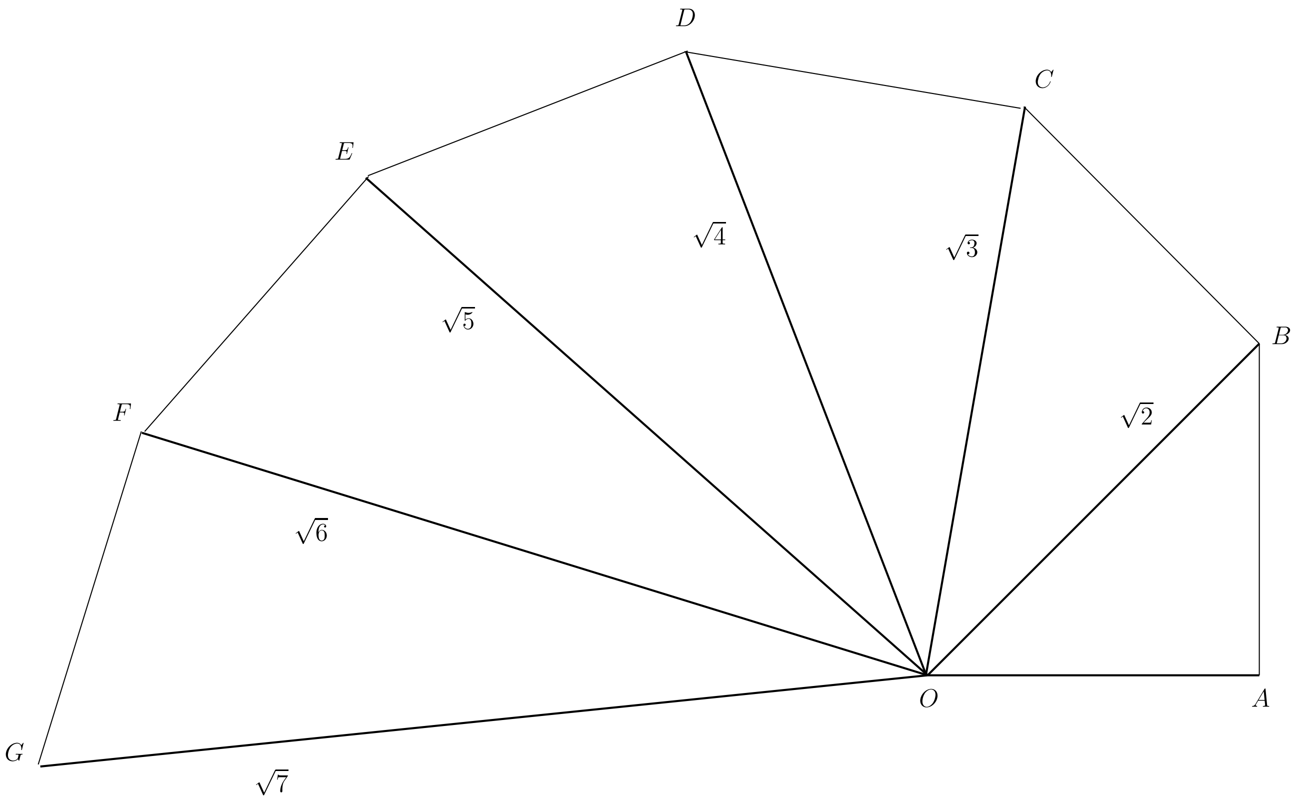

Figura 5: La spirale di Teodoro.

Vogliamo ora dimostrare che dato un numero naturale n, che non è un quadrato perfetto, ossia che non si può scrivere come $n = m^2$ con $m \in \mathbb{N}$, allora $\sqrt{n}$ ***non è un numero razionale***. La dimostrazione procede *per assurdo*, ossia supponendo che $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ e dimostrando che da questo assunto si ottiene una contraddizione.

Considerando che n non è un quadrato perfetto, $\sqrt{n}$ sarà compreso tra due numeri naturali λ e $\lambda + 1$:

$$\lambda < \sqrt{n} < \lambda + 1 \ .$$

Supponiamo che $\sqrt{n}$ sia un numero razionale, allora possiamo scrivere

$$\sqrt{n} = \frac{a}{b} \Longrightarrow n = \frac{a^2}{b^2}$$

e scegliamo $a, b \in \mathbb{N}^*$ tale che essi non abbiamo fattori comuni (ossia la frazione è ridotta ai minimi termini e quindi b è il denominatore più piccolo ed a il numeratore più piccolo).
Possiamo quindi scrivere

$$\lambda^2 < n < (\lambda + 1)^2 \Longrightarrow b^2\lambda^2 < a^2 < (\lambda + 1)^2 b^2 \Longrightarrow b\lambda < a < (\lambda + 1)b$$

l'ultima coppia di disuguaglianze permette di scrivere $a - b\lambda > 0$ e $a - b\lambda < b$. Poniamo $b' = a - b\lambda$ e abbiamo $0 < b' < b$.
Definiamo poi $a' = nb - a\lambda$ e osserviamo che

$$a' = \frac{a^2}{b^2} b - a\lambda = \frac{a}{b}(a - \lambda b) = \frac{a}{b} b' \Longrightarrow 0 < a' < a \ .$$

Allora

$$\begin{aligned} a'^2 - nb'^2 &= (nb - a\lambda)^2 - n(a - b\lambda)^2 = n^2b^2 - 2nab\lambda + a^2\lambda^2 - na^2 - nb^2\lambda^2 + 2nab\lambda \\ &= \lambda^2(a^2 - nb^2) - n(a^2 - nb^2) = (\lambda^2 - n)(a^2 - nb^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

poiché per ipotesi $n = \frac{a^2}{b^2}$. Possiamo quindi scrivere

$$n = \frac{a'^2}{b'^2} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{a'}{b'}$$

con $0 < a' < a$ e $0 < b' < b$ in *contraddizione* con l'ipotesi che l'espressione di $\sqrt{n}$ sia data dalla frazione $\frac{a}{b}$ ridotta ai minimi termini. Quindi concludiamo che $\sqrt{n}$ non è un numero razionale.

Conclusione
I numeri dati dalle radici dei numeri naturali, che non sono dei quadrati perfetti, costruiti sulla spirale di Teodoro e che possono essere riportati sulla retta numerica, non sono numeri razionali.