Fonctions exponentielles de base a

Connaissance travaillée	Non acquise	En cours d'acquisition	Acquise
Connaître et utiliser le sens de variation des fonctions de la forme $x \mapsto ka^x$ selon le signe de k et les valeurs de a.			
Passer d'une suite géométrique à une fonction exponentielle.			
Connaître les propriétés algébriques des fonctions exponentielles et les utiliser pour transformer des écritures numériques ou littérales.			
Calculer un taux d'évolution global.			
Calculer le taux d'évolution moyen.			

I/ Fonctions exponentielles du type ka^x.

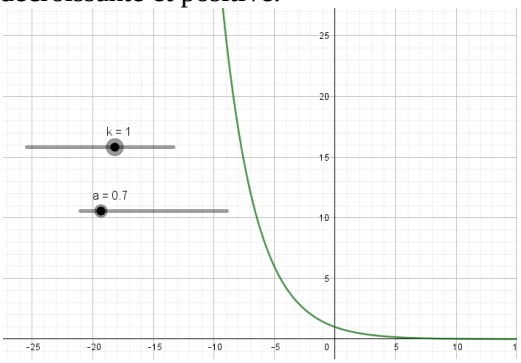
Pour toutes les fonctions que nous étudierons, $a > 0$ et $k \notin \mathbb{R}$. Ces fonctions sont soit strictement croissantes soit strictement décroissantes. Et on nomme ces fonctions des fonctions exponentielles de base a.

On sait que $a^0 = 1$. Donc toutes ces fonctions passent par le point de coordonnées $(0 ; k)$

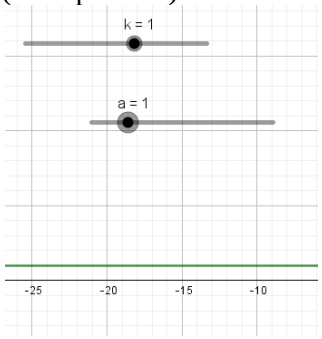
Effet des valeurs de a et k sur les variations de la fonction.

Si $k > 0$ et (tous les exemples sont tracés avec $k = 1$)

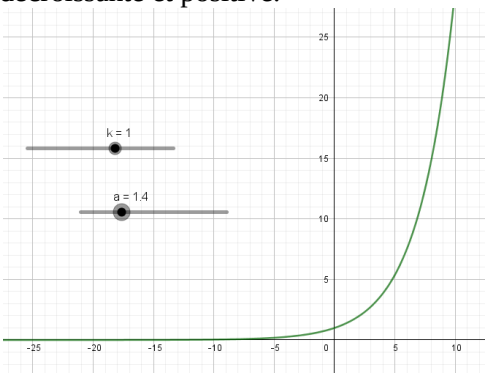
$0 < a < 1$:
Dans ce cas la fonction sera strictement décroissante et positive.



$a = 1$:
Dans ce cas la fonction sera constante et égale à k (donc positive).

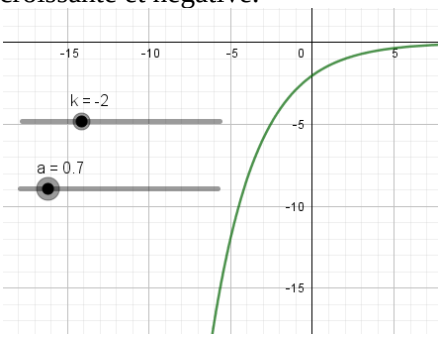


$1 < a$:
Dans ce cas la fonction sera strictement décroissante et positive.

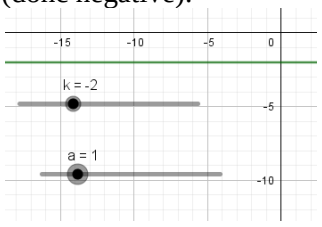


Si $k < 0$ et (tous les exemples sont tracés avec $k = -2$)

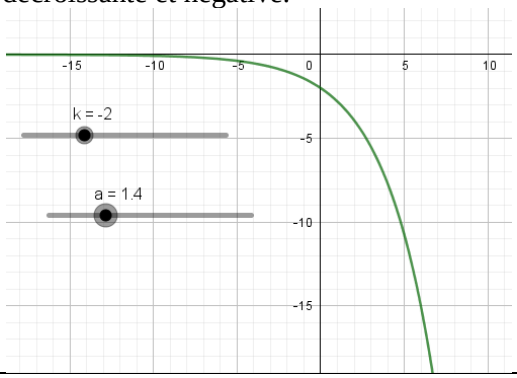
$0 < a < 1$:
Dans ce cas la fonction sera strictement croissante et négative.



$a = 1$:
Dans ce cas la fonction sera constante et égale à k (donc négative).



$1 < a$:
Dans ce cas la fonction sera strictement décroissante et négative.



II/ Propriétés algébriques :

Les propriétés algébriques des fonctions exponentielles sont les mêmes que les propriétés apprises en classe de seconde et au collège sur les puissances :

Formules :	Exemples :
$a^x \times a^y = a^{x+y}$	$3^4 \times 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$
$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$	$\frac{1}{3^4} = 3^{-4}$
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2$
$(a^x)^y = a^{x \times y}$	$(3^4)^2 = 3^{4 \times 2} = 3^8$
$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$

On peut alors combiner ces formules pour simplifier des expressions par exemple :

$A = \frac{(3^2)^3 \times 3^{-2}}{3^{-1} \times 3^{-3}} = \frac{3^6 \times 3^{-2}}{3^{-4}} = \frac{3^4}{3^{-4}} = 3^8$

$B = (\sqrt{3})^{2,5} \times (\sqrt{3})^{1,5} = (\sqrt{3})^4 = 3^{\frac{1}{2} \times 4} = 3^2$

III/ Fonctions exponentielles, suites géométriques et taux d'évolution :

1) Rappels sur les suites géométriques et les coefficients multiplicateurs.

Coefficient multiplicateur :

Augmenter (ou diminuer) une quantité de a% c'est la multiplier par :

CM = $1 \pm \frac{a}{100}$

Exemple :

Un volume au départ de 50mL augmente de 20% sous l'effet de la température. Calculer le volume après augmentation.

$V_{final} = 50 \times (1 + \frac{20}{100}) = 60$mL

Augmentations successives :

Lors d'augmentations successives, pour trouver le coefficient multiplicateur global, il suffit de multiplier les coefficients multiplicateurs relatifs à chaque variation entre eux.

Exemple :

Le prix d'un téléviseur était initialement de 250€, ce il y a eu une réduction de 20%, puis une augmentation de 10%. Quel est le prix final ?

Calcul des coefficients multiplicateurs : $CM_{-20\%} = 1 - \frac{20}{100} = 0,8$; $CM_{+10\%} = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$

Calcul du coefficient multiplicateur global : $CM = 0,8 \times 1,1 = 0,88$

Calcul du prix final : $P_{final} = 250 \times 0,88 = 220$€

Déterminer le coefficient multiplicateur à partir de deux valeurs :

Si on passe d'une valeur V_0 à une valeur V_1 en augmentant ou en diminuant d'un certain pourcentage, le coefficient multiplicateur associé à cette évolution est obtenu en calculant :

$$CM = \frac{V_1}{V_0}$$

Déterminer le taux d'évolution (ou pourcentage d'évolution) à partir du CM :

On peut trouver le pourcentage d'évolution noté t à partir du CM à l'aide de la formule suivante :

$t = (CM - 1) \times 100$

Formule explicite d'une suite géométrique :

Pour une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 on se rappellera que :

$u_n = u_0 \times q^n$

2) Taux d'évolution moyen :

Définition :

Pour n évolution successives associées à un CM_{global}, le taux d'évolution moyen t_m représente le taux associé à chacune des n évolutions pour obtenir une évolution équivalente à celle déterminée par le CM_{global}. On le calcule avec la formule suivante :

$$t_m = (CM_{global}^{\frac{1}{n}} - 1) \times 100$$

Exemple :

La cote en bourse d'une action a augmenté de 3% par an pendant 5 ans. Elle a ensuite baissé de 4% pendant 4 ans puis a de nouveau augmenté de 2% par an pendant 3ans. Déterminer le taux annuel moyen après ces 12 années d'évolution.

Calcul du CM_{global} :

$$CM_{global} = 1{,}03^5 \times 0{,}96^4 \times 1{,}02^3 \approx 1{,}045$$

Calcul du taux annuel moyen :

Il y a eu 12 évolutions donc *n=12*.

$$t_m = \left(1{,}045^{\frac{1}{12}} - 1\right) \times 100 \approx 0{,}367$$

Donc ces évolutions successives sont équivalentes à 12 augmentations successives de 0,367%.

3) Du discret au continu :

Les suites géométriques sont discontinu, cependant nous avons vu qu'il était possible de calculer avec des puissances non entières. On peut donc prolonger les suites géométriques pour obtenir des fonctions continues. Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison *q*. On pourra associer la fonction exponentielle de base q correspondante qui sera :

$f(x) = u_0 \times q^x$